ГЕОМЕТРІЯ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ

Попов Михайло Михайлович

УДК 517.982

спецкурс для студентів 4 курсу
спеціальності «Математика»

Чернівці - 2011

Зміст

Вступ

Мета спецкурсу і особливості методичного посібника. Методичний посібник укладений за матеріалами спецкурсу, який автор читав у Чернівецькому Національному університеті протягом 10 років.

Наука про банахові простори створювалася від першої половини минулого століття, зокрема зусиллями потужної групи львівських математиків, до якої входили С. Банах, С. Мазур, В. Орлич, Ю. Шаудер Г. Штейнгауз а також у другій половині – багатьма математиками з усього світу. Цікаві та надзвичайно складні проблеми приваблюють декілька сотень математиків і у наш час. У рамках невеличкого спецкурсу ми познайомимося з деякими напрямками та цікавими результатами цієї науки. Крім того, на нас чекають нерозв'язані на сьогодні задачі. Спробуйте свої сили!

Від читача вимагаються стандартні знання з функціонального аналізу. Даний спецкурс узгоджений з курсом функціонального аналізу, який читає В. К. Маслюченко, а також зі спецкурсом «Топологічні векторні простори», який читає В. В. Михайлюк на нашому факультеті.

У наступному підрозділі ми нагадуємо деякі з найважливіших понять і теорем.

Результати супроводжуються повними доведеннями і, при можливості, вказівками на авторство (за винятком математичного фольклору, тобто добре відомих результатів, авторство яких встановити не вдається).

Підрозділ 1.2 містить основні поняття і теореми з курсу функціонального аналізу, які вільно використовуються у тексті. Матеріали цього підрозділу не викладаються на лекціях і наведені лише для зручності читача.

Розділ 2 носить факультативний характер; його результати не використовуються у подальшому матеріалі і не плануються бути викладеними у рамках спецкурсу. Але, з іншого боку, без розуміння лінійного аналізу, практично, неможливо розраховувати на успіх у науковій роботі у галузі теорії банахових просторів. Враховуючи також відсутність подібного матеріалу у літературі, автор вирішив розширити методичні рекомендації початківцям, запропонувавши низку естетично приваблюючих результатів.

На жаль, з багатьох цікавих розділів теорії банахових просторів довелося вибрати лише маленьку їх частину, щоб розмістити у межах невеличкого спецкурсу.

Література і трохи історії. Наука про банахові простори народилася на початку XX століття і активно розвивалася у Львівському університеті. Її патроном безперечно був сам Стефан Банах (з біографією Банаха можна познайомитися на сайті http://banach.univ.gda.pl/index.html). Надзвичайно важливу роль у розвитку цієї науки зіграли дві книги. Перша з них – «Теорія лінійних операцій», яка вийшла у 1931 р. польською мовою і у 1932 р. – французькою. Величезний вплив мало видання у 1948 р. українського перекладу цієї книги [1]. Одна цікава відома історія, яку ми запозичили у статті Я. Притули і А. Плічка: «*у 1950 р. випускника Харківського університету Мішу Кадеця направили на роботу у Пожежній Школі м. Макіївки на Донбасі. Від'їжджаючи, у вокзальному кіоску Міша купив книжку, щоб було щось читати у дорозі. Це був український переклад Книги Банаха*». Сьогодні М. Й. Кадець (Харків) відомий як найвизначніший фахівець на усьому пост-радянському просторі з теорії просторів Банаха. Друга книга, вплив якої на розвиток цієї науки важко переоцінити, – так звана, «Шкоцька книга». Її назва походить від Шкоцької (тобто Шотландської) кав'ярні у центрі Львова (тепер такої кав'ярні немає), де відбувалися зібрання математиків, які (не рідко за кухлем пива) розв'язували задачі з багатьох розділів математики, здебільшого, з функціонального аналізу. Це була рукописна книга, до якої потрапляли ті задачі, які ніхто не міг розв'язати. Автори задач інколи вказували на винагороду, яку вони гарантують за розв'язання; найбільша винагорода – живий гусак або гуска. Шкоцька книга була видана видавництвом Birkhäuser у 1981 р. під редакцією Р. Маулдіна з коментарями різних математиків до задач [38]. Стосовно теорії банахових просторів, розв'язання двох задач із зазначених книг мало неабиякий резонанс. Перша з них, яка поставлена у книзі [1], була розв'язана нашим співвітчизником М. Й. Кадецем у 1966 р., який, завдяки багаторічній праці довів, що довільні два сепарабельні нескінченновимірні банахові простори є гомеоморфними як топологічні простори. При цьому автор значно розвинув підрозділ теорії просторів Банаха – теорію перенормувань.

Друга задача – чи у кожному сепарабельному банаховому просторі існує базис Шаудера – була розв'язана негативно у 1973 р. шведським математиком П. Енфло, який, згодом, урочисто одержав обіцяну винагороду від автора, С. Мазура, живого гуся. Проблема базису була також поставлена в [1]; Шкоцька книга містила близьку проблему, еквівалентну до, так званої, проблеми апроксимації, яку також негативно розв'язав Енфло.

Є ще дві книги, які займають особливе місце в історії цієї науки, це – двотомник ізраїльських математиків Й. Лінденштрауса і Л. Цафрірі «Класичні банахові простори», видані у 1977 і 1979 роках відповідно [35], [36]. Не зважаючи на те, що після видання цих книг чимало було зроблено у цій науці, вони й досі залишаються настільними книгами спеціалістів з банахових просторів. Нещодавно до списку настільних книг спеціалісти записали книгу іспанського математика Ф. Албіака і відомого американського класика сучасного аналізу Н. Калтона [12]. Серед сотень монографій, які стосуються банахових просторів, слід звернути увагу на ті, які були написані (у співавторстві з) видатним автором Дж. Дістелем [17], [19], [18]. Зазначимо, що є російський переклад книги Дістеля «Геометрия банаховых пространств» [2], який вийшов у 1980 р. у Київському видавництві «Вища школа». Сучасний стан теорії (точніше, деяких основних її розділів) викладений у двотомному довіднику, який було видано під редакцією В. Джонсона і Й. Лінденштрауса [28], [29]. Нарешті, вийшов з друку результат багаторічної праці німецького спеціаліста з теорії операторів А. Піча [44] про історію розвитку теорії просторів Банаха і теорії операторів.

Важливі поняття з курсу функціонального аналізу.

Банахові простори. Весь необхідний матеріал курсу функціонального аналізу з повними доведеннями читач може знайти у [50].

Лінійний простір X над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (дійсних або комплексних чисел) називається *нормованим простором*, якщо на X задана невід'ємна числова функція $x \longrightarrow \|x\|$, яка називається *нормою*, і яка задовольняє такі умови для довільних $x, y \in X$ та $\alpha \in \mathbb{K}$

(i) $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ елементів нормованого простору X називається:

– *збіжною* (до елемента $x \in X$), якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$;

– *фундаментальною*, якщо $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$.

Основний елементарний технічний прийом як математичного, так і функціонального аналізу, який має назву $\varepsilon/2$-прийом, полягає у наступному. Нехай нам потрібно довести, що відстань між елементами x та y менша за ε. Для цього нам достатньо знайти елемент z, який знаходиться від x та y на відстані $< \varepsilon/2$ і скористатися нерівністю трикутника для модуля, або для норми. Так, легко довести, що кожна збіжна послідовність є фундаментальною:

$$\|x_n - x_m\| = \big\|(x_n - x) + (x - x_m)\big\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\|.$$

Нагадаємо, що метричний (а отже, і нормований) простір називається *повним*, якщо правильне і обернене твердження, тобто якщо кожна фундаментальна послідовність є збіжною.

Повний нормований простір називається *банаховим простором.*

Задача 1. *Нехай X – нормований простір. Довести, що відображення $X \longrightarrow [0, +\infty)$, яке співставляє кожному елементу $x \in X$ його норму $\|x\|$ є неперервним.*

Кожного разу у математиці, коли визначається «підоб'єкт», наприклад, підмножина, підгрупа, підпростір і т. і., вимагається, щоби ця підмножина успадкувала всі основні властивості цілого об'єкту. Отже, коли йдеться про підпростір нормованого простору, досить вимагати від підмножини лише її лінійність, а у випадку підпростору банахового простору до лінійності додається ще повнота, яка, очевидно, рівносильна із замкненістю.

Підпростором банахового простору називається його довільний замкнений лінійний підпростір.

Приклад 1. *n-вимірні простори ℓ_p^n при $1 \le p < \infty$*

$$\ell_p^n = \mathbb{K}^n, \quad \|(x_1, \dots, x_n)\| = \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Приклад 2. *n-вимірний простір $c_0^n = \ell_\infty^n$*

$$c_0^n = \mathbb{K}^n, \quad \|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_{1 \le k \le n} |x_k|.$$

Приклад 3. *Простори ℓ_p при $1 \le p < \infty$*

$$\ell_p = \Big\{x = (x_n)_{n=1}^\infty : \ x_n \in \mathbb{K}, \ \|x\| = \Big(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\Big\}.$$

Приклад 4. *Простір ℓ_∞*

$$\ell_\infty = \Big\{x = (x_n)_{n=1}^\infty : \ x_n \in \mathbb{K}, \ \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\Big\}.$$

Наступний простір є підпростором простору ℓ_∞.

Приклад 5. *Простір c_0*

$$c_0 = \Big\{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty : \ \lim_{n \to \infty} |x_n| = 0\Big\}.$$

Приклад 6. *Простір $C[a, b]$ неперервних функцій $x : [a, b] \to \mathbb{K}$ з нормою*

$$\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

Приклад 7. *Простори Лебеґа L_p при $1 \le p < \infty$. Елементами L_p є класи еквівалентності вимірних функцій $x : [0, 1] \to \mathbb{K}$ з нормою*

$$\|x\| = \Big(\int_{[0,1]} |x|^p d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Через λ ми позначаємо міру Лебеґа на $[0, 1]$.

Приклад 8. *Простір L_∞. Елементами L_∞ є класи еквівалентності вимірних істотно обмежених функцій $x : [0,1] \to \mathbb{K}$*

$$\|x\| = \inf_{\lambda(A)=0} \sup_{t\in[0,1]\setminus A} |x(t)| < \infty.$$

Лінійні неперервні оператори. Нехай X і Y – нормовані простори. Лінійний оператор $T : X \to Y$ називається:

– *неперервним у точці* $x_0 \in X$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} Tx = Tx_0$;

– *неперервним*, якщо він є неперервним у кожній точці $x_0 \in X$;

– *обмеженим*, якщо $\|Tx\| \le M\|x\|$ для деякого числа $M \ge 0$ і всіх $x \in X$. При цьому число

$\|T\| \stackrel{def}{=} \min\Big\{M > 0 : \ (\forall x \in X)\left(\|Tx\| \le M\|x\|\right)\Big\} < \infty$

називається *нормою* оператора T.

Отже, $\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$ для всіх $x \in X$ для обмеженого оператора T.

Виходячи з цих означень, неважко довести, що неперервність лінійного оператора у деякій точці еквівалентна його неперервності, яка, у свою чергу, еквівалентна обмеженості. Нескладно доводиться також, що якщо X - нормований простір і Y - банахів простір, то $\mathcal{L}(X,Y)$ - також банахів простір. Зокрема, спряжений X^* до нормованого простору X є банахів простір (існування ненульових елементів X^* при $X \neq \{0\}$ випливає з теореми Гана-Банаха).

Нехай X, Y – нормовані простори. Оператор $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ називається:

- *обмеженим знизу*, або ізоморфним вкладенням, якщо існує $\delta > 0$, таке, що $\|Tx\| \ge \delta\|x\|$ для всіх $x \in X$;
- *ізоморфізмом*, якщо він є обмеженим знизу та сюр'єктивним;
- *ізометричним вкладенням*, якщо $\|Tx\| = \|x\|$ для кожного $x \in X$;
- *ізометрією*, якщо він є сюр'єктивним ізометричним вкладенням.

Ми будемо використовувати такі факти.

Теорема 1. *Нехай X, Y - нормовані простори. Для довільного оператора $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ маємо*

$$\|T\| = \sup_{x\in S(X)} \|Tx\| = \sup_{x\in B(X)} \|Tx\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Зауважимо, що якщо $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ і $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, то композиція $S \circ T \in \mathcal{L}(X,Z)$, причому $\|S \circ T\| \le \|S\|\,\|T\|$. Зокрема, якщо $T \in \mathcal{L}(X)$, то $\|T^n\| \le \|T\|^n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$.

Нехай X та Y – лінійні простори. Лінійний оператор $T : X \to Y$ називається *скінченновимірним*, якщо його образ TX є скінченновимірним підпростором Y.

Ми будемо використовувати наступний відомий факт.

Теорема 2. *Кожний лінійний ізоморфізм між двома скінченновимірними нормованими просторами є ізоморфізмом.*

З теореми 2 випливають такі важливі наслідки:

(i) кожний скінченновимірний нормований простір є банаховим простором;

(ii) кожний скінченновимірний лінійний підпростір банахового простору є його підпростором.

Зауважимо, що на довільному нескінченновимірному банаховому просторі X існують лінійні розривні функціонали, які є необмеженими скінченновимірними операторами.

Нехай X – нормований простір. Лінійний оператор $T : X \to \mathbb{K}$ називається *лінійним функціоналом*, а множина $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ усіх лінійних неперервних функціоналів на X називається *спряженим до X простором* і позначається через X^*.

Оскільки простір $\mathbb{K}$ повний, то спряжений до нормованого простору є банаховим простором.

Теорема 3 (Гана-Банаха; аналітична форма)**.** *Нехай X – нормований простір і X_0 - його лінійний підпростір. Для кожного $f_0 \in X_0^*$ існує (не обов'язково единий) $f \in X^*$, такий, що $f(x) = f_0(x)$ для всіх $x \in X_0$ та $\|f\| = \|f_0\|$.*

Якщо за підпростір X_0 взяти одновимірний підпростір, породжений деяким вектором $x_0 \in X$, то вийде наступний важливий наслідок.

Наслідок 1. *Для кожного $x_0 \in X \setminus \{0\}$ існує $f \in S(X^*)$ такий, що $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Теорема 4 (Гана-Банаха; геометрична форма)**.** *Нехай X – нормований простір, A, B – непорожні, опуклі, неперетинні* *підмножини X, причому A є компактною, а B – замкненою. Тоді існують $f \in X^*$ та дійсні числа α, β, такі, що*

$$\operatorname{Re} f(x) \leq \alpha < \beta \leq \operatorname{Re} f(y)$$

для всіх $x \in A$ та $y \in B$.

Нагадаємо означення спряженого оператора.

Нехай X, Y - нормовані простори і $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, що визначається рівністю $T^* y^*(x) = y^*(Tx)$ для довільних $x \in X$ та $y^* \in Y^*$, називається *оператором, спряженим до T.*

Лінійність оператора T^* очевидна. Його обмеженість, а також рівність норм $\|T^*\| = \|T\|$ випливає з таких міркувань:

$$\|T\| = \sup_{x \in S(X)} \|Tx\| = \sup_{x \in S(X)} \sup_{y^* \in S(Y^*)} \left| y^* (Tx) \right| =$$

$$= \sup_{y^* \in S(Y^*)} \sup_{x \in S(X)} \left| (T^* y^*) \, x \right| = \sup_{y^* \in S(Y^*)} \|T^* y^*\| = \|T^*\|.$$

Задача 2. *Нехай X – нормований простір. Довести, що для кожного $x \in X$*

$$\|x\| = \sup_{x^* \in S(X^*)} |x^*(x)|.$$

Задача 3. *Нехай X – банахів простір. Довести, що відображення τ, яке співставляє кожному елементу $x \in X$ елемент $\tau(x) \in X^{**}$ за правилом $\tau(x)(x^*) = x^*(x)$ для кожного $x^* \in X^*$, є ізометричним вкладенням простору X в X^{**}.*

Відображення, що описане у попередній задачі, називається *канонічним відображенням банахового простору X у другий спряжений X^{**}*. Якщо канонічне відображення сюр'єктивне, то банахів простір X називається *рефлексивним.* У протилежному випадку простір X називається *нерефлексивним.*

З відомих теорем про опис спряжених просторів до прикладів, які наведені нижче, випливає, що простори ℓ_p та L_p при $1 < p < \infty$ є рефлексивними, проте простори c_0, ℓ_1, ℓ_∞, L_1, L_∞, $C[a, b]$ є нерефлексивними. Крім того, усі скінченновимірні простори рефлексивні. У нашому спецкурсі ми вивчатимемо різні критерії рефлексивності простору.

Нехай X, Y – довільні множини. *Графіком* функції $F : X \to Y$ називається наступна множина:

$$\Gamma(F) = \big\{\big\langle x, F(x)\big\rangle \in X \times Y : \ x \in X\big\}.$$

Неважко переконатися у тому, що графік лінійного обмеженого оператора є замкненою множиною в $X \times Y$. Для банахових просторів правильне і обернене твердження.

Теорема 5 (Банаха про замкнений графік)**.** *Нехай X, Y – банахові простори, $T : X \to Y$ – лінійний оператор. Якщо графік $\Gamma(T)$ є замкненою множиною в $X \times Y$, то T – обмежений оператор.*

Для того, щоб зрозуміти, що означає замкненість множини у декартовому добутку $X \times Y$, зауважимо, що на $X \times Y$ норму можна задати багатьма природними способами, наприклад, $\|(x, y)\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$, де $p \in [1, +\infty)$ – довільне фіксоване число, або $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Але у будь-якому разі послідовність $\big((x_n, y_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ збігається до елемента (x, y) тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Таким чином, замкненість графіка лінійного оператора $T : X \to Y$ означає, що якщо послідовність (x_n) в X збігається до $x \in X$ і (Tx_n) збігається до y в Y, то $y = Tx$.

Теорема 6 (Банаха про обернений оператор)**.** *Нехай X, Y – банахові простори, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ – бієкція (тобто існує обернений оператор T^{-1}, який, очевидно, є лінійним). Тоді оператор T^{-1} обмежений.*

Сформулюємо принципо рівномірної обмеженості.

Теорема 7 (Банаха-Штейнгауза)**.** *Нехай X, Y – банахові простори, I – довільна множина; $(T_i)_{i\in I}$ – поточково обмежена сім'я лінійних неперервних операторів з X в Y, тобто для кожного $x \in X$ існує константа $\gamma(x) \geq 0$, така, що $\|T_i x\| \leq \gamma(x)$ для всіх $i \in I$. Тоді $(T_i)_{i\in I}$ – рівномірно обмежена сім'я, тобто $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.*

Банахів простір X називається *сепарабельним*, якщо X містить зліченну всюди щільну підмножину.

Задача 4. *Довести, що серед наведених нижче прикладів лише простори ℓ_∞ та L_∞ є несепарабельними.*

1. Вступ до структурної теорії банахових просторів

1.1. **Деякі результати про структуру класичних просторів. Універсальні простори.** Добре відомі теореми Мазура стверджують, що простір $C[0,1]$ є універсальним для класу сепарабельних банахових (окрім того, простір $C[0,1]$ універсальний і для класу сепарабельних метричних просторів) просторів, тобто кожний сепарабельний банахів простір ізометричний до деякого підпростору простору $C[0,1]$, а простір L_1 так само, як і простір ℓ_1, є ко-універсальним для цього ж класу, тобто кожний сепарабельний банахів простір ізометричний до деякого фактор-простору простору L_1 [1]. Менш відомий класичний результат Ґротендіка стверджує, що нескінченновимірний сепарабельний банахів простір ізоморфний до деякого підпростору L_1 і до деякого фактор-простору $C[0,1]$ тоді і лише тоді, коли він ізоморфний до гільбертова простору [27].

Простори c_0 і ℓ_p при $1 \leq p \leq \infty$. Відносно просту структуру мають підпростори просторів c_0 і ℓ_p при $1 \leq p < \infty$. Так, довільний нескінченновимірний підпростір X простору $E \in \{c_0, \ell_p : 1 \leq p < \infty\}$ містить підпростір $Y \subseteq X$, ізоморфний до E (див. твердження 4.1). Комбінуючи цей результат з теоремою Пітта про компактність операторів з c_0 в ℓ_p і з ℓ_p в ℓ_r при $1 \leq r < p < \infty$, отримуємо, що жоден простір з класу $E \in \{c_0, \ell_p : 1 \leq p < \infty\}$ не вкладається ізоморфно у будь-який інший простір з цього класу. Класична теорема Пелчиньського стверджує, що кожний нескінченновимірний доповнювальний підпростір простору E з цього ж класу ізоморфний до E [35, с. 54]. З іншого боку, кожний простір $E \in \{c_0, \ell_p : 1 \leq p < \infty, p \neq 2\}$ містить підпростір без базису Шаудера [16].

Простір L_∞, який, очевидно, містить підпростір, ізометричний до $C[0,1]$, також є універсальним для класу сепарабельних банахових просторів. Ту саму властивість має і простір ℓ_∞, який є ізоморфним (але не ізометричним) до L_∞ [42]. Крім того, простір ℓ_∞ має ту саму властивість, що й простори ℓ_p: кожний доповнювальний підпростір простору ℓ_∞ ізоморфний до ℓ_∞ (а отже, всі сепарабельні підпростори не є доповнювальними) [35, с. 131].

Простори L_p при $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$ мають складнішу, але надзвичайно цікаву структуру. Так, простір ℓ_p очевидним чином ізометрично вкладається в L_p. Крім того, ℓ_2 вкладається ізоморфно в L_p при будь-якому $p \in [1, \infty)$ (див. наслідок 4.11). Простір c_0 не вкладається ізоморфно в L_p при жодному $p \in [1, \infty)$ (при $p > 1$ це випливає з міркувань рефлексивності, а при $p = 1$, наприклад, з того, що простір L_1 є слабко секвенціально повним, а c_0 не є). Глибока теорема, яку можна вважати результатом колективних зусиль багатьох авторів (Дакунья-Кастель, М. Кадець, Крівін, П. Леві, Лінденштраус, Пелчиньський) стверджує, що простір L_p вкладається ізоморфно в L_r при $1 \le r < p \le 2$. В усіх інших випадках простір L_p (і, навіть, ℓ_p) не вкладається ізоморфно в L_r (С. Банах [1, с. 175] і П. Леві [32]). Як ми бачимо, властивості просторів L_p при $p < 2$ і $p > 2$ відрізняються. При $2 < p < \infty$ кожний підпростір простору L_p:

- або є ізоморфним до ℓ_2, або містить доповнювальний підпростір, ізоморфний до ℓ_p [31];

- або містить підпростір, ізоморфний до ℓ_2, або вкладається ізоморфно в ℓ_p [30].

При $1 \le p < 2$ кожний підпростір простору L_p або містить доповнювальний підпростір, ізоморфний до ℓ_p, або вкладається ізоморфно в L_r при деякому $p < r \le 2$ [49].

При $2 < p < \infty$ кожний підпростір X простору L_p, ізоморфний до ℓ_2, є доповнювальним, причому на X норми $\|\cdot\|_2$ та $\|\cdot\|_p$ є еквівалентними [31], у той час як при $1 < p < 2$ простір L_p має як доповнювальні, так і не доповнювальні підпростори, ізоморфні до ℓ_2 [47], [14]. Нарешті, у просторі L_1 всі підпростори, ізоморфні до ℓ_2 (більше того, всі рефлексивні підпростори) недоповнювальні [43].

Доповнювальні підпростори просторів L_p. Теорема Енфло стверджує, що якщо простір L_p розбито у суму двох своїх доповнювальних підпросторів $L_p = X \oplus Y$, то, принаймні, один з підпросторів X, Y ізоморфний до L_p [39]. Цю саму властивість має і простір $C[0, 1]$ [33].

Легко бачити, що простір L_p має доповнювальний підпростір, ізоморфний до ℓ_p. Крім того, при $p \neq 2$ простір L_p має й недоповнювальний підпростір, ізоморфний до ℓ_p (звідси неважко вивести існування недоповнювального простору, ізоморфного до L_p). При $2 < p < \infty$ і $1 < p < 4/3$ це довів Розенталь [48], при $1 < p < 2$

– Бенет, Дор, Гудман, Джонсон і Ньюмен [14] і, нарешті, при $p = 1$ – Бургейн [15].

На сьогодні відомо, що при $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ існує незліченно багато попарно неізоморфних банахових просторів, які ізоморфні до деяких доповнювальних підпросторів простору L_p, і всього лише відомо два (з точністю до ізоморфізму) нескінченновимірні простори – це L_1 і ℓ_1, які ізоморфні до доповнювальних підпросторів простору L_1. Одна з найцікавіших проблем, які на сьогодні ще не розв'язані, – наступна.

Проблема 1. *Чи існує нескінченновимірний доповнювальний підпростір простору L_1, не ізоморфний до L_1 та ℓ_1?*

1.2. **Проблеми від часів Банаха.** Від Банаха та його колег Мазура, Орлича, Штейнгауза та ін. залишалося чимало нерозв'язаних структурних проблем, зокрема такі (з поняттями базиса Шаудера і безумовної базисної послідовності ми ознайомимося пізніше).

(1) Чи у кожному нескінченновимірному банаховому просторі існує лінійний неперервний оператор, який не можна подати у вигляді $\lambda I + K$, де I – тотожний оператор, а K – деякий компактний оператор?

(2) Чи довільний нескінченновимірний банахів простір X можна розкласти у пряму суму своїх двох нескінченновимірних підпросторів $X = Y \oplus Z$?

(3) Чи кожний нескінченновимірний сепарабельний банахів простір має базис Шаудера?

(4) Чи у кожному нескінченновимірному банаховому просторі існує безумовна базисна послідовність?

(5) Чи кожний банахів простір ізоморфний до своїх гіперпідпросторів (тобто підпростір корозмірності 1)?

(6) Чи кожний нескінченновимірний банахів простір містить підпростір, ізоморфний до c_0 або ℓ_p при деякому $1 \leq p < \infty$?

(7) Чи кожний банахів простір, в якого всі підпростори є доповнювальними, ізоморфний до гільбертового простору?

Перший прорив у розв'язанні цих проблем було здійснено на початку 70-х років. Ізраїльські математики Лінденштраус і Цафрірі у 1971 р., використовуючи теорему Дворецького про майже евклідові розрізи опуклих тіл, розв'язали позитивно проблему (7) [34]. Далі шведський математик Енфло побудував у 1973 р. банахів простір без базису Шаудера [21] (проблема (3)). Нарешті, радянський математик Цирельсон у 1974 р. навів контрприклад до основної структурної гіпотези (проблема (6))[10]. Ми знайомимо читача з гарною конструкцією цього надзвичайно важливого простору з повними доведеннями у підрозділі 4.2. Так сталося, що техніка, яку розробив Цирельсон для побудови свого простору, дозволила іншим математикам побудувати контрприклади до практично всіх такого сорту проблем. 20 років знадобилося спеціалістам для удосконалення методу Цирельсона. Не захоплюючись деталями, зауважимо, що з 1991 по 1994 роки Одел і Шлумпрехт, значно погіршивши простір Цирельсона, побудували простір з додатковими патологічними властивостями. Скориставшись деякими зауваженнями Джонсона, Гауерс і Море одночасно побудували контрприклад до проблеми (4). Далі автори вирішили опублікувати спільну роботу, у якій принагідно порозв'язували майже всю решту проблем.

У революційній роботі Гауерса і Море 1993 р. [26] автори побудували нескінченновимірний сепарабельний банахів простір X, властивості якого дають негативну відповідь на проблеми (2), (4), (5):

(i) X не має безумовної базисної послідовності;

(ii) X не містить підпросторів $X_1 \subseteq X$, які розкладаються у пряму суму своїх двох нескінченновимірних підпросторів $X_1 = Y \oplus Z$;

(iii) X не є ізоморфним до будь-якого свого власного підпростору (зокрема до своїх гіперпідпросторів);

(iv) кожний лінійний неперервний оператор на X має вигляд $\lambda I + K$, де K – строго сингулярний оператор (тобто який не є ізоморфізмом при звуженні на жодний нескінченновимірний підпростір; кожний компактний оператор є строго сингулярним, але не навпаки).

Отже, нерозв'язаною на сьогодні з цих проблем залишається лише (1).

1.3. **Теорема Дворецького про майже евклідові розрізи опуклих тіл і феномен концентрації міри на сфері.** Цілу епоху у дослідженнях структури банахових просторів ініціювала знаменита теорема Дворецького про майже евклідові розрізи опуклих тіл, яка, фактично, була підтвердженням однієї з гіпотез Ґротендіка.

Теорема 1.1 (Дворецький, 1959). [20] *Для довільного $\varepsilon > 0$ і довільного $k \in \mathbb{N}$ існує $n = n(k, \varepsilon)$, таке, що у довільному n-вимірному нормованому просторі X існує k-вимірний підпростір $Y \subset X$, який є $(1+\varepsilon)$-ізоморфним до ℓ_2^k.*

З оригінального доведення Дворецького можна дістати таку оцінку на функцію, яка фігурує у теоремі: $n(k, \varepsilon) = \exp\left(c\,\varepsilon^{-2} k^2 \ln k\right)$, де c – деяка абсолютна константа. Далі ряд робіт різних математиків було присвячено зменшенню цієї функції. Найкращий результат, який був одержаний ймовірнісними методами, належить Ґордону [25] (1975): $n(k, \varepsilon) = \exp\left(c\,\varepsilon^{-2} k\right)$. Основним інструментом доведення було застосування ізопериметричної нерівності та феномену концентрації міри на сфері. Зацікавленому читачеві ми рекомендуємо звернутися до монографій Мільмана-Шехтмана [40] і Піз'є [45]. Крім того, доведення на ідейному рівні можна знайти в [24]. Ми також рекомендуємо елементарне ймовірнісне доведення Мацака і Плічка [37].

Для формулювання ізопериметричної нерівності позначимо через S_{n-1} одиничну евклідову сферу простору $\mathbb{R}^n$, через σ – нормовану (тобто ймовірнісну) міру Лебеґа на S_{n-1}. Для довільної борелівської підмножини $A \subseteq S_{n-1}$ і $\varepsilon > 0$ задамо $A_\varepsilon = \{x \in S_{n-1} : \ |x - A| < \varepsilon\}$.

Теорема 1.2 (Ізопериметрична нерівність). *Для довільної борелівської підмножини $A \subseteq S_{n-1}$ міри $\sigma(A) = 1/2$ має місце нерівність*

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2}}.$$

Зафіксувавши ε і спрямувавши $n \to \infty$, одержуємо, так званий, *феномен концентрації міри на сфері.* Спробуємо його інтерпретувати у такій фантастичній формі. На перший погляд здавалося би, що жити у просторах великої розмірності було б досить «вільно». Але це далеко не так. Уявімо, що на земній кулі реального розміру, площа сфери якої 1 (якась умовна одиниця) у n-вимірному просторі живуть мешканці двох країн, які вирішили поділити земну кулю навпіл. Нехай число ε настільки мале, що порівняно з обраною умовною одиницею площі означає довжину 1 см, число $\delta > 0$ настільки мале, що ступня кожної людини має більшу площу. Проведемо лінію кордону по екватору товщиною в 2ε. Знайдемо n так, щоби

$$\sqrt{\frac{\pi}{8}}\; e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2}} \;<\; \frac{\delta}{2}\,.$$

Взявши за A по черзі кожну половину земної сфери A' і A'', отримаємо, згідно з ізопериметричною нерівністю, що $\sigma(A'_\varepsilon) \geq 1-\delta/2$ і $\sigma(A''_\varepsilon) \geq 1-\delta/2$. Отже, площа лінії кордону стає

$$\begin{aligned}\sigma(A'_\varepsilon \cap A''_\varepsilon) \geq \sigma(S_{n-1}) - \sigma(S_{n-1}\setminus A'_\varepsilon) - \sigma(S_{n-1}\setminus A''_\varepsilon) =\\ = 1 - 1 + \sigma(A'_\varepsilon) - 1 + \sigma(A''_\varepsilon) > 1-\delta.\end{aligned}$$

Отже, площа лінії кордону настільки мало відрізняється від площі сфери, що жодна людина не зможе ступити на землю так, щоби не зачепити цю лінію!

2. Деякі відомості з лінійного аналізу

2.1. **Базиси Гамеля.** Почнімо з добре відомого означення.

Означення 2.1. *Підмножина $B = \{e_i : i \in I\}$ лінійного простору E над полем $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ дійсних або комплексних скалярів називається базисом в E, якщо для довільного $x \in E$ існує єдиний набір скалярів $(a_i)_{i\in I}$, серед яких лише скінченна кількість відмінна від нуля, і таких, що*

$$x = \sum_{i\in I} a_i e_i.$$

Як випливає з означення, базис – не впорядкована множина. Якщо у даному лінійному просторі задана ще топологія, метрика чи норма, то для того, щоби відрізняти базис лінійного простору від інших типів базису (Шаудера, Маркушевича тощо), цей базис називають *алгебричним базисом* [11, с. 73], *векторним базисом* [3, с. 9] або *базисом Гамеля* [9, с. 14].

Задача 5. *Довести, що система елементів є базисом в E тоді і тільки тоді, коли вона є максимальною лінійно незалежною (нескінченна система елементів вважається лінійно незалежною, якщо всі її скінченні підсистеми лінійно незалежні) системою в E.*

Наступне твердження є прикладом безпосереднього застосування леми Цорна (нагадаємо, що лема Цорна використовується при доведенні теореми Гана-Банаха).

Твердження 2.2. *У довільному лінійному просторі будь-яку лінійно незалежну систему можна розширити до базису.*

Перед доведенням наведемо формулювання самої леми Цорна. Зауважимо, що лема Цорна є твердженням, еквівалентним до аксіоми вибору. Можна, звичайно, навести її доведення, виходячи з аксіоми вибору і навпаки. Але не маючи наміру занадто зосереджуватися на питаннях теорії множин, обмежимося цим зауваженням і будемо використовувати як аксіому вибору, так і Лему Цорна за аксіому.

Нагадаємо, що *бінарне відношення* $\leq$ на множині M (тобто довільна підмножина $\tau \subseteq M^2$ декартового квадрату; при цьому запис $x \leq y$ означає, що $(x, y) \in \tau$) називається *частковим порядком* на M, якщо виконуються такі умови:

(i) $x \le x$;

(ii) $\Big((x \le y) \wedge (y \le x)\Big) \Rightarrow (x = y)$;

(iii) $\Big((x \le y) \wedge (y \le z)\Big) \Rightarrow (x \le z)$

для довільних $x, y, z \in M$.

Множина M разом із зафіксованим частковим порядком $\le$ на M називається *частково впорядкованою множиною* (скорочено – ЧВМ). ЧВМ M називається лінійно впорядкованою множиною, якщо

(iv) $(\forall x, y \in M)\Big((x \le y) \vee (y \le x)\Big)$.

Лінійно впорядкована підмножина частково впорядкованої множини називається *ланцюгом.* Елемент $x_0 \in M$ називається *верхньою межею* підмножини $X \subseteq M$ ЧВМ M, якщо $x \le x_0$ для всіх $x \in X$. Елемент $y_0 \in M$ ЧВМ M називається *максимальним*, якщо для кожного $x \in M$ з умови $y_0 \le x$ випливає, що $x = y_0$. Елемент $y_0 \in M$ ЧВМ M називається *найбільшим*, якщо $x \le y_0$ для кожного $x \in M$. Очевидно, кожна непорожня скінченна лінійно впорядкована множина має найбільший елемент, а кожна скінченна ЧВМ – максимальний елемент.

Задача 6. *Довести, що найбільший елемент ЧВМ є максимальним, але навпаки невірно.*

Зауважимо, що максимальних елементів може бути багато. Наприклад, якщо на множині M розглянути мінімальний частковий порядок (тобто вважати, що $x \le y$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$), то кожний елемент стає максимальним. З іншого боку, лінійно впорядкована множина $\mathbb{R}$ з її природним порядком не містить максимальних елементів.

Аксіома 2.3 (Лема Цорна). *Нехай $(M, \le)$ – непорожня частково впорядкована множина, кожний ланцюг якої має верхню межу в M. Тоді M має максимальний елемент.*

Неважко зрозуміти, що висновок леми Цорна можна підсилити, стверджуючи, що кожний елемент $x \in M$ мажорується деяким максимальним елементом.

Доведення твердження 2.2. Нехай A – довільна лінійно незалежна система елементів у лінійному просторі E. Позначимо через

$\mathcal{M}$ сукупність усіх лінійно незалежних систем $B \subseteq E$, що містять A. Задамо на $\mathcal{M}$ частковий порядок, визначивши $B \leq C$ тоді і тільки тоді, коли $B \subseteq C$.

Доведемо, що довільний ланцюг $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$ має верхню межу в $\mathcal{M}$. Покладемо $S = \bigcup \mathcal{L} = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{L}} B$. Доведемо, що $S \in \mathcal{M}$. Оскільки $A \subseteq B$ для всіх $B \in \mathcal{L}$, то $A \subseteq S$, тобто залишається встановити лінійну незалежність S. Якщо б S була лінійно залежною, то існувала би скінченна лінійно залежна підмножина $S_0 = \{a_k : k = 1, \ldots, n\} \subseteq S$. Нехай, для визначеності, $a_k \in B_k \in \mathcal{L}$. Виберемо найбільший елемент B_{k_0} скінченного ланцюга $\{B_k : k = 1, \ldots, n\}$. Тоді $S_0 \subseteq B_{k_0}$, тобто лінійно незалежна містить лінійно залежну, – суперечність.

За побудовою, S є верхньою межею ланцюга $\mathcal{L}$. Згідно з лемою Цорна, $\mathcal{M}$ має максимальний елемент B. За визначенням елементів множини $\mathcal{M}$, B є лінійно незалежною системою, що містить A. Якби B не була б максимальною лінійно незалежною системою, то це суперечило би максимальності B у множині $\mathcal{M}$. $\square$

Кажуть, що лінійний простір E є *прямою сумою* своїх підпросторів E_1 і E_2 і записують цей факт так: $E = E_1 \oplus E_2$, якщо для будь-якого $x \in E$ існує єдина пара елементів $y \in E_1$ та $z \in E_2$, така, що $x = y + z$.

Для довільної підмножини A лінійного простору E через $\operatorname{Lin} A$ позначатимемо лінійну оболонку A.

Твердження 2.4. $E = E_1 \oplus E_2$ *тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:*

(i) $\operatorname{Lin}(E_1 \cup E_2) = E$;

(ii) $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Доведення. Умова (i) означає існування зображення довільного елемента з E у вигляді суми елементів з E_1 і E_2 відповідно, а умова (ii) – єдиність такого подання. $\square$

Наслідок 2.5. *Для довільного підпростору* E_0 *лінійного простору* E *існує алгебричне доповнення* E_1 *до* E*, тобто* $E = E_0 \oplus E_1$.

Доведення. Досить зауважити, що якщо A – базис лінійного простору E і $A = B \sqcup C$, то $E = \operatorname{Lin} B \oplus \operatorname{Lin} C$. $\square$

З курсу лінійної алгебри добре відомо, що якщо лінійний простір має скінченний базис (саме у цьому випадку він називається скінченновимірним), то всі інші базиси мають ту ж саму кількість елементів. Загальніше, у довільному лінійному просторі два довільні базиса є рівнопотужними [3, с. 10], а їх потужність називається *розмірністю* простору. Якщо на даному лінійному просторі E задана ще топологічна структура, то потужність базису Гамеля називається *алгебричною розмірністю* цього простору та позначається через $\dim \mathrm{alg} E$. Зауважимо, що алгебрична розмірність нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору дорівнює c. Найпростіший спосіб переконатися у цьому такий. Очевидно, що система $\{\chi_{[0,t]} : 0 < t \le 1\}$ характеристичних функцій відрізків $[0, t]$, є лінійно незалежною у просторі $L_2 = L_2[0, 1]$ і має потужність континуума. Але оскільки потужність всього $L_2[0, 1]$ - також континуум, то потужність базису Гамеля не може бути більшою за потужність континуума. Результат наступної задачі, яку ми пропонуємо розв'язати з використанням цієї інформації, був одержаний (іншим методом) Маккі у 1946 р.

Задача 7. *Довести, що потужність базису Гамеля сепарабельного банахового простору X дорівнює c.*

Задача 8. *Довести, що у сепарабельному гільбертовому просторі існує всюди щільний базис Гамеля (набагато складніше довести існування в ℓ_2 базису Гамеля другої категорії).*

Лінійні оператори (зокрема лінійні функціонали) визначаються своїми значеннями на базисі Гамеля.

Задача 9. *Нехай X, Y – лінійні простори і $(e_i)_{i \in I}$ – базис Гамеля в X. Тоді для довільної системи елементів $(y_i)_{i \in I}$ з Y існує єдиний лінійний оператор $T : X \to Y$, для якого $Te_i = y_i$ при всіх $i \in I$.*

Це просте спостереження дозволяє доводити існування розривних лінійних функціоналів.

Твердження 2.6. *Множина L_2^* всіх лінійних неперервних функціоналів на L_2 має потужність континуума c, а множина L_2' всіх лінійних функціоналів на L_2 – потужність* 2^c (яка строго більша за c, згідно з теоремою Кантора). *Отже, «більшість» лінійних* *функціоналів є розривними (нічого дивного, адже множина всіх неперервних числових функцій має потужність c, а множина всіх числових функцій – потужність 2^c).*

Доведення. Нехай $(x_n)_1^\infty$ – довільна всюди щільна в L_2 послідовність. Кожній неперервній функції $F : L_2 \to \mathbb{K}$ співставимо послідовність $\big(F(x_n)\big)_1^\infty$. Якщо $F_1, F_2 : L_2 \to \mathbb{K}$ – різні неперервні функції, то послідовності $\big(F_i(x_n)\big)_{n=1}^\infty$, $i = 1, 2$ також різні (доведіть це самостійно!). Таким чином, неперервних функцій, а отже, і елементів L_2^* не більше, ніж послідовностей елементів множини $\mathbb{K}$, потужність яких також c, як і самої множини $\mathbb{K}$ (останній факт доводиться на тій самій ідеї, що й зліченність зліченного об'єднання зліченних множин, див., наприклад, [6]). З іншого боку, $|L_2^*| \geq c$, отже, $|L_2^*| = c$.

Нехай $(e_i)_{i \in I}$ – базис Гамеля в L_2 (ми вже знаємо, що $|I| = c$). Для довільної підмножини $J \subseteq I$ визначимо лінійний функціонал на L_2 рівністю $f_J(x_i) = \chi_J(i)$ – характеристична функція множини J (див. результат задачі 9). Оскільки різним підмножинам співставлені різні функціонали, то $|L_2'| \geq 2^c$. Але оскільки $|L_2| = c = |\mathbb{K}|$ (потужність довільного сепарабельного метричного простору не більша за c), то потужність множини всіх функцій з L_2 в $\mathbb{K}$ дорівнює $\left|\mathbb{R}^{L_2}\right| = c^c = 2^c$ [6], тому $|L_2'| \leq 2^c$. Таким чином, рівність $|L_2'| \leq 2^c$ доведено. $\square$

Зазначимо, що замість простору L_2 в останньому твердженні міг би бути довільний сепарабельний банахів простір. Доведення при цьому використовує техніку виділення базисних послідовностей (див. підрозділ 3.5).

2.2. **Лінійні функціонали, гіперпідпростори і фактор-простори.** Нагадаємо, що бінарне відношення $\sim$ на множині X називається *відношенням еквівалентності*, якщо

(i) $x \sim x$;

(ii) з $x \sim y$ випливає $y \sim x$ та

(iii) з $x \sim y \sim z$ випливає $x \sim z$

для всіх $x, y, z \in X$.

Використовуючи (i) – (iii), неважко довести, що класи еквівалентності $A_x = \{y \in X : y \sim x\}$ мають таку альтернативну властивість: для довільних $x, y \in X$ або $A_x = A_y$, або $A_x \cap A_y = \emptyset$. Таким чином, відношення еквівалентності (за допомогою аксіоми вибору) розбиває множину X на попарно неперетинні класи еквівалентності:

$$X = \bigsqcup_{x \in M} A_x,$$

де множина M складається з «представників» від кожного класу еквівалентності.

Нехай Y є підпростором лінійного простору X. Для довільних $x, y \in X$ задамо $x \sim y$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in Y$. Неважко переконатися у тому, що $\sim$ є відношенням еквівалентності на X. Множина X/Y всіх класів еквівалентності A_x, $x \in X$ називається *фактор-простором* простору X по підпростору Y. Функція, яка кожному елементу $x \in X$ співставляє клас еквівалентності $\tau(x) = A_x$, що містить цей елемент, називається *фактор-відображенням* з X на X/Y. Очевидно, фактор-відображення τ є лінійним оператором з ядром (ядро лінійного відображення $A : X \to Y$ визначається так: $\ker A = \{x \in X : \ Ax = 0\}$) $\ker \tau = Y$. На X/Y вводяться природні операції суми і добутку на скаляр: для довільних $A, B \in X/Y$ та $\lambda \in \mathbb{K}$ вибираються довільно $x \in A$ і $y \in B$ і покладається $A + B = A_{x+y}$ і $\lambda A = A_{\lambda x}$. Неважко переконатися у тому, що результат $A + B$ і λA не залежить від вибору представників $x \in A$, $y \in B$, а також у тому, що X/Y з такими операціями стає лінійним простором з нулем $0 = A_0 = Y$. Якщо при цьому X є нормованим простором, а Y – його замкненим підпростором, то фактор-простір X/Y наділяється природною нормою $\|A\| = \inf\limits_{x \in A} \|x\|$ (без умови замкненості це лише переднорма). З означення норми на фактор-просторі безпосередньо випливає, що фактор-відображення є обмеженим оператором норми ≤ 1, тобто $\|\tau x\| \le \|x\|$.

Лінійні простори X та Y називаються *ізоморфними*, якщо існує лінійна бієкція з X на Y, яка називається *ізоморфізмом* лінійного простору X на лінійний простір Y. Оскільки обернений до лінійного оператору, а також композиція лінійних операторів є, очевидно, лінійними операторами, то бінарне відношення «X та Y є ізоморфними» є відношенням еквівалентності на класі (поняття «класу» у математиці є дещо ширшим, ніж поняття множини. Так, клас усіх лінійних просторів не є множиною у звичайному розумінні, оскільки призводить до парадоксу Расела. Формально клас ототожнюється з властивістю множин; таким чином, вважається, що дана множина належить до класу, якщо вона має потрібну властивість) всіх лінійних просторів.

Твердження 2.7. *1. Нехай лінійний простір X розбито у пряму суму підпросторів $X = Y \oplus Z$. Тоді Z ізоморфний до фактор-простору X/Y. Точніше, звуження $\tau|_Z$ фактор-відображення $\tau : X \to X/Y$ є ізоморфізмом з Z на фактор-простір X/Y.*

2. Якщо, крім цього, X є банаховим простором, а Y, Z – його замкненими підпросторами, то $\tau|_Z$ є ізоморфізмом нормованих просторів, тобто існують числа $\alpha, \beta > 0$, такі, що $\alpha \|z\| \leq \|\tau z\| \leq \beta \|z\|$ для довільного $z \in Z$.

Доведення. 1. Оскільки оператор $\tau|_Z$ за означенням є сюр'єктивним, достатньо довести лише його ін'єктивність. Нехай, навпаки, існує $z \in Z$, $z \neq 0$, такий, що $\tau z = 0$, тобто $z \in Y$ – суперечність.

2. Як зазначалося вище, права частина потрібної нерівності виконується з $\beta = 1$. Існування такого $\alpha > 0$, що $\|\tau z\| \geq \alpha\|z\|$ випливає з теореми Банаха про обернений оператор, адже $\tau|_Z$ є бієкцією, згідно з 1. $\square$.

Наслідок 2.8. (i) *Довільні два доповнення Z_1 і Z_2 до одного лінійного підпростору Y лінійного простору X (тобто $X = Y \oplus Z_1 = Y \oplus Z_2$) є ізоморфними.*

(ii) *Довільні два підпростори Z_1 і Z_2 банахового простору X, які є доповненнями до спільного підпростору Y простору X є ізоморфними.*

Доведення. Згідно з твердженням 2.7, кожний з цих підпросторів є ізоморфним до фактор-простору X/Y. $\square$.

Корозмірністю підпростору Y лінійного простору X називається розмірність фактор-простору X/Y, тобто $\operatorname{codim} Y = \dim X/Y$. Згідно з твердженням 2.7, корозмірність підпростору дорівнює розмірності його доповнення. *Гіперпідпростором* лінійного простору називається довільний його підпростір корозмірності 1.

Позначимо через X' множину всіх лінійних функціоналів на лінійному просторі X. Наступні твердження прояснюють структуру лінійного функціоналу.

Твердження 2.9. *1. Ядро* $\ker f$ *довільного ненульового функціоналу* $f \in X'$ *є гіперпідпростором.*

2. Якщо X *є нормованим простором, то неперервність функціоналу* $f \in X'$ *рівносильна замкненості його ядра* $\ker f \subseteq X$*.*

3. Навпаки, для довільного гіперпідпростору Y *лінійного простору* X *існує ненульовий функціонал* $f \in X'$*, ядро якого дорівнює* Y*.*

4. Якщо $f, g \in X'$ *– два такі функціонали, що* $\ker f = \ker g$*, то вони є лінійно залежними, тобто* $f = \alpha g$ *для деякого скаляру* $\alpha \in \mathbb{K}$*.*

Доведення. 1. Неважко переконатися у тому, що якщо $x_0 \in X \setminus \ker f$, то

$$X = \{\lambda x_0 : \ \lambda \in \mathbb{K}\} \oplus \ker f.$$

2. Якщо f є неперервним, то $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ замкнена множина, як прообраз замкненої. Нехай $f \in X'$ – необмежений функціонал. Виберемо послідовність $x_n \in X$ з $\|x_n\| = 1$ і $|f(x_n)| > n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді для $y_n = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_n)} x_n$ отримаємо $y_n \in \ker f$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_1 \notin \ker f$, отже, $\ker f$ – незамкнена підмножина X.

3. Нехай $0 \neq x_0 \in X$ і $X = \{\lambda x_0 : \ \lambda \in \mathbb{K}\} \oplus X_0$. Тоді $f(\lambda x_0 + x) = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{K}, \ x \in X_0$ – шуканий функціонал.

Пункт 4 є частковим випадком наступної теореми. $\square$.

Теорема 2.10. *Нехай* X *– лінійний простір;* $n \in \mathbb{N}$ *і* $f_1, \dots, f_n \in X'$*. Наступні умови еквівалентні:*

(i) $(f_i)_1^n$ *лінійно незалежні;*

(ii) *існує система векторів* $x_1, \dots, x_n \in X$*, яка називається біортогональними векторами до* $(f_i)_1^n$ *і має таку властивість:* $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$*;*

(iii)
$$\operatorname{codim} \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i = n.$$

Доведення. Доведемо твердження теореми індукцією за $n \geq 1$. При $n = 1$ кожна з умов рівносильна тому, що $f_1 \neq 0$, а тому твердження правильне при $n = 1$. Нехай $n > 1$. Припустивши, що твердження є вірним при $n - 1$, доведемо його для n.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Зафіксуємо довільне $k \in \{1,\ldots,n\}$ і доведемо, що $\bigcap\limits_{i\neq k} \ker f_i \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i \neq \emptyset$. Нехай, навпаки, $\bigcap\limits_{i\neq k} \ker f_i \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i$. Оскільки $(f_i)_{i\neq k}$ – лінійно незалежна система, то з припущення індукції випливає, що існують біортогональні вектори $(y_i)_{i\neq k}$ до цієї системи. Визначимо лінійний оператор на X, визначивши $Tx = \sum\limits_{i\neq k} f_i(x)\, x_i$ для кожного $x \in X$. Оскільки $x - Tx \in \bigcap\limits_{i\neq k} \ker f_i$ для кожного $x \in X$, то, згідно з припущенням, $x - Tx \in \ker f_k$ для всіх $x \in X$. Тому, діючи функціоналом f_k на тотожність $x = Tx + \bigl(x - Tx\bigr)$, одержимо $f_k(x) = \sum\limits_{i\neq k} f_i(x)\, f_k(x_i)$ для кожного $x \in X$, тобто $f_k \in \mathrm{Lin}\,(f_i)_{i\neq k}$, що суперечить (i). Таким чином, можна вибрати $z_k \in \bigcap\limits_{i\neq k} \ker f_i \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i$. Оскільки $f(z_k) \neq 0$, то можна покласти $x_k = z_k/f(z_k)$. Отже, маємо $f_j(x_k) = 0$ при $j \neq k$ і $f_k(x_k) = 1$. Проробивши вказану процедуру для всіх $k = 1,\ldots,n$, отримаємо біортогональну систему векторів.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Нехай $(x_j)_1^n$ – біортогональна система векторів для $(f_i)_1^n$. Покладемо $X_0 = \mathrm{Lin}\,(x_j)_1^n$ і $Y = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i$ і доведемо, що $X = X_0 \oplus Y$. Дійсно, для кожного $x \in X$ маємо

$$x = f_1(x)x_1 + \ldots + f_n(x)x_n + y, \quad \text{де} \quad y = x - f_1(x)x_1 - \ldots - f_n(x)x_n.$$

Оскільки $y \in Y_0$, то потрібний розклад елемента x знайдено. Доведемо, що $X_0 \cap Y = \{0\}$. Нехай $X_0 \ni z = a_1x_1 \ldots + a_nx_n \in Y$, тобто $0 = f_i(z) = a_i$ для кожного $i = 1,\ldots,n$. Отже, $z = 0$ і, тим самим, розклад $X = X_0 \oplus Y$ встановлено. Залишається довести лінійну незалежність системи $(x_j)_1^n$. Нехай $a_1x_1+\ldots+a_nx_n = 0$. Тоді $0 = f_i(a_1x_1+\ldots+a_nx_n) = a_i$ для всіх i. Таким чином, $\dim X_0 = n$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. З (iii) випливає, що не всі f_i можуть дорівнювати 0, а тому можна вибрати лінійно незалежну підсистему $(f_i)_{i\in A}$, де $\emptyset \neq A \subseteq \{1,\ldots,n\}$. Припустимо, що (i) не виконується. Тоді $f_k \in \mathrm{Lin}\,(f_i)_{i\in A}$ для деякого $k \in \{1,\ldots,n\} \setminus A$. Оскільки $\bigcap\limits_{i\in A} \ker f_i \subseteq \ker f_k$, то $\bigcap\limits_{i\in A} \ker f_i =$

$\bigcap\limits_{i\in A\cup\{k\}} \ker f_i$. Але згідно з припущенням індукції,

$$|A| = \operatorname{codim} \bigcap_{i\in A} \ker f_i = \operatorname{codim} \bigcap_{i\in A\cup\{k\}} \ker f_i = |A| + 1,$$

– суперечність. $\square$.

Наслідок 2.11. *Нехай X – лінійний простір. Тоді для довільних $f, f_1, \dots, f_n \in X'$ наступні умови еквівалентні:*

(i) $f \in \operatorname{Lin}(f_i)_1^n$;

(ii) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i \subseteq \ker f$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ є очевидною. Доведемо $(ii) \Rightarrow (i)$. Без обмеження загальності вважаємо, що $(f_i)_1^n$ – лінійно незалежна система (в протилежному випадку працюємо з довільною її лінійно незалежною підсистемою). Якщо (i) не виконується, то система $f, f_1, \dots, f_n$ також лінійно незалежна. Тому з теореми 2.10 випливає, що

$$n = \operatorname{codim} \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i = \operatorname{codim} \left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \cap \ker f\right) = n + 1,$$

– суперечність. $\square$.

Наслідок 2.12. *Для довільної системи векторів $(x_i)_1^n$ у лінійному просторі X наступні умови еквівалентні:*

(i) $(x_i)_1^n$ лінійно незалежні;

(ii) існує система функціоналів $f_1, \dots, f_n \in X$, яка називається біортогональними функціоналами до $(x_i)_1^n$ і має таку властивість: $f_j(x_i) = \delta_{i,j}$.

Доведення. Позначимо через $\tau : X \to X''$ – канонічне відображення, тобто $\tau(x)(f) = f(x)$ для довільних $x \in X$ і $f \in X'$. Застосувавши до $\tau(x_1), \dots, \tau(x_n) \in X''$ теорему 2.10, одержимо, що система $\big(\tau(x_i)\big)_1^n$ лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли існують $f_1, \dots, f_n \in X'$ з умовою $\tau(x_i)(f_j) = \delta_{i,j}$. Залишається зауважити, що, згідно з означенням, $\tau(x_i)(f_j) = f_j(x_i)$ і що лінійна незалежність системи $\big(\tau(x_i)\big)_1^n$ в X'' рівносильна лінійній незалежності системи $(x_i)_1^n$ в X. $\square$.

2.3. **Доповнювальні підпростори банахових просторів.** Як ми побачили у підрозділі 2.1, кожний лінійний підпростір лінійного простору має алгебричне доповнення. Але у банаховому просторі може статися таке, що для даного підпростору, який є замкненим за означенням, усі такі алгебричні доповнення є незамкненими.

Означення 2.13. *Підпростір Y банахового простору X називається доповнювальним, якщо існує підпростір $Z \subseteq X$, для якого $X = Y \oplus Z$.*

Поняття доповнювального підпростору тісно пов'язане з проекторами.

Означення 2.14. *Нехай X – лінійний простір. Лінійний оператор $P : X \to X$ називається проектором, якщо $P^2 = P$, тобто $P(Px) = Px$ для всіх $x \in X$.*

Твердження 2.15. *Підпростір Y банахового простору X є доповнювальним тоді і тільки тоді, коли існує обмежений проектор $P \in \mathcal{L}(X)$, для якого $P(X) = Y$.*

Доведення. Нехай Y – доповнювальний підпростір простору X, тобто існує підпростір $Z \subseteq X$, для якого $X = Y \oplus Z$. Визначимо оператор $P : X \to Y$ за правилом: для кожного $x \in X$ задамо $Px = y$, де $x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$. Лінійність P не викликає сумніву. Доведемо замкненість графіка оператора P. Нехай $x_n \to x$, $x_n, x \in X$, $Px_n \to u$, $u \in X$. Завдяки замкненості Y маємо $u \in Y$, тобто $Pu = u$. Оскільки $(Px_n - x_n) \in Z$, то $(u - x) \in Z$, адже, Z також є замкненою множиною. Останнє означає, що $P\,(u - x) = 0$, тобто $Px = u$. Отже, замкненість графіка доведена. Згідно з теоремою Банаха, P є обмеженим. Властивості $P^2 = P$ та $P(X) = Y$ є очевидними.

Нехай P – проектор з X на Y та $x \in X$. Покладемо $Z = \ker P = P^{-1}(\{0\})$. Замкненість Z випливає з неперервності P. Тотожність $x = Px + (x - Px)$ розкладає, очевидно, x у шукану суму. Залишається довести єдиність розкладу. Нехай $x = y + z$, де $y \in Y$ і $z \in Z$. Тоді $Px = P\,(y + z) = y$ та $x - Px = x - y = z$. $\square$.

Означення 2.16. *Нехай банахів простір X розкладений у пряму суму підпросторів $X = Y \oplus Z$. Проектор $P \in \mathcal{L}(X)$, для якого $P(X) = Y$ і $\ker P = Z$, називається проектором з X на Y паралельно Z.*

Наступна теорема характеризує різноманітність доповнень Z до підпростору Y у банаховому просторі X, коли існує, принаймні, одне (або, іншими словами, різноманітність множини проекторів на доповнювальний підпростір).

Теорема 2.17. *Нехай банахів простір X розкладений у пряму суму підпросторів $X = Y \oplus Z$ та $T \in \mathcal{L}(Z, Y)$. Тоді $X = Y \oplus Z_1$, де $Z_1 = \{z + Tz : \ z \in Z\}$ – також є підпростором простору X. Крім того, $Z_1 \neq Z$ при $T \neq 0$. Навпаки, якщо $X = Y \oplus Z_1$ для деякого підпростору $Z_1 \subseteq X$, то існує єдиний оператор $T \in \mathcal{L}(Z, Y)$, для якого $Z_1 = \{z + Tz : \ z \in Z\}$.*

Доведення. Доведемо замкненість Z_1. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + Tz_n) = x \in X$, де $z_n \in Z$. Позначимо через P проектор з X на Y паралельно Z, задамо $z = x - Px$ і доведемо, що $x = z + Tz$. З неперервності P випливає, що $Tz_n = P(z_n + Tz_n) \longrightarrow Px$, а отже, $z_n = (z_n + Tz_n) - Tz_n \longrightarrow x - Px = z$. З іншого боку, $Tz_n \longrightarrow Tz$. Тому $Tz = Px$. Остаточно отримуємо $z+Tz = x-Px+Px = x$. Замкненість доведено.

Доведемо, що $X = Y \oplus Z_1$. Нехай $x = y+z$, де $y \in Y$ і $z \in Z$. Тоді $x = (y-Tz)+(z+Tz)$ є шуканим розкладом. Доведемо його єдиність, тобто умову $Y \cap Z_1 = \{0\}$. Нехай $(z + Tz) \in Y$. Тоді $z = \big((z + Tz) - Tz\big) \in Y$ як різниця елементів Y. Отже, $z = 0$, а разом з тим і $z + Tz = 0$.

Нехай $T \neq 0$ і $z \in Z$, такий, що $Tz \neq 0$. Тоді легко бачити, що $(z + Tz) \notin Z$. Зокрема, $Z_1 \neq Z$.

Нехай $X = Y \oplus Z = Y \oplus Z_1$. Позначимо через P_1 проектор з X на Y паралельно Z_1 і задамо $T = -P_1\big|_Z$. Доведемо, що T є шуканим оператором, тобто рівність $Z_1 = \{z + Tz : \ z \in Z\}$. Нехай $z_1 \in Z_1$. Розкладемо $z_1 = y + z$ так, щоб $y \in Y$ та $z \in Z$. Тоді

$$z + Tz = z - P_1 z = z - P_1(z_1 - y) = z + y = z_1.$$

Нехай тепер $z \in Z$. Доведемо, що $z+Tz \in Z_1$, тобто що $P_1(z+Tz) = 0$. Дійсно,

$$P_1(z + Tz) = P_1(z - P_1 z) = P_1 z - P_1 z = 0.$$

Залишається довести єдиність T. Нехай $Z_1 = \{z + Tz : \ z \in Z\} = \{z + T_1 z : \ z \in Z\}$, де $T, T_1 \in \mathcal{L}(Z, Y)$. Припустимо, навпаки, що існує $z_0 \in Z$, для якого $Tz_0 \neq T_1 z_0$. Оскільки $(z_0 + Tz_0) \in \{z + T_1 z : \ z \in Z\}$, то $z_0 + Tz_0 = z + T_1 z$ для деякого $z \in Z$, тобто $z_0 - z = T_1 z - Tz_0$. Але $Z \cap Y = \{0\}$, а тому $z = z_0$ і $T_1 z = Tz$, – суперечність. $\square$.

Надзвичайну важливість поняття доповнювального підпростору демонструє наступне просте твердження.

Твердження 2.18. *Підпростір Y банахового простору X є доповнювальним тоді і тільки тоді, коли для довільного банахового простору Z довільний лінійний неперервний оператор $T : Y \to Z$ можна продовжити до деякого лінійного неперервного оператора $\tilde{T} : X \to Z$.*

Доведення. Нехай $P : X \to Y$ – обмежений проектор. Тоді довільний оператор $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ продовжується на X так: $\tilde{T} = T \circ P$. Навпаки, нехай довільний лінійний неперервний оператор $T : Y \to Z$ можна продовжити. Покладемо $Z = Y$ і $T : Y \to Z$ – тотожне вкладення. Тоді довільне продовження $\tilde{T}$ оператора T з Y на X буде проектором з Y на X. $\square$.

Задача 10. *Довести, що множина всіх проекторів (всіх обмежених проекторів) з лінійного простору (банахового простору) X на підпростір Y є опуклою.*

Означення 2.19. *Нехай $\lambda \in [1, \infty)$. Підпростір Y банахового простору X називається λ-доповнювальним, якщо існує проектор P з X на Y, такий, що $\|P\| \leq \lambda$.*

Оскільки $\|P\| \geq 1$ для довільного ненульового проектора, то обмеження $\lambda \geq 1$ цілком природне у цьому означенні.

Задача 11. *Довести, що у гільбертовому просторі кожний підпростір є 1-доповнювальним.*

Задача 12. *Довести, що довільний скінченновимірний підпростір банахового простору є доповнювальним.*

Довший час стояла нерозв'язаною така проблема: чи правильно, що коли у банаховому просторі X усі підпростори доповнювальні, то X ізоморфний до гільбертового простору? Ця проблема була позитивно розв'язана ізраїльськими математиками Й. Лінденштраусом і Л. Цафрірі у 1971 році [34]. Щоб зрозуміти нетривіальність доведення того, що у довільному банаховому просторі, не ізоморфному до гільбертового простору, існують недоповнювальні підпростори, спробуйте побудувати хоча б один приклад недоповнювального підпростору у деякому банаховому просторі! Серед прикладів недоповнювальних підпросторів є приклад класичних просторів: c_0 недоповнювальний в ℓ_∞ (ідея відносно простого доведення, яка належить А. Плічку, описана в [7]).

Тепер ми трохи розповімо про цікаву історію розвитку прикладів недоповнювальних підпросторів, яку ми запозичили з сучасного огляду А. Плічка і Д. Йоста [46] з теорії недоповнювальних підпросторів, розрахованого на зрілого фахівця. Зауважимо, що перший огляд з цієї тематики – це стаття М. Кадеця і Б. Мітягіна [5].

1932. С. Мазур. Простір ℓ_1 має недоповнювальний підпростір. Добре відомо, що довільний сепарабельний банахів простір X ізоморфний до деякого фактор-простору ℓ_1/Y (це доводиться за допомогою побудови лінійного неперервного оператора $T : \ell_1 \to X$, який є продовженням рівності $Te_n = x_n$ на весь простір ℓ_1, де e_n – послідовність, n-й член якої дорівнює 1, а всі решта – нулі, а (x_n) – довільна щільна в одиничній кулі послідовність елементів X з $\|x\| \leq 1$; тоді можна взяти $Y = \ker T$). З твердження 4.2 (див. нижче) випливає, що ℓ_2 не може бути ізоморфним до підпростору простору ℓ_1, а отже, підпростір $Y \subseteq \ell_1$, такий, що простір ℓ_2 ізоморфний до ℓ_1/Y, є недоповнювальним, тому що доповнення було б підпростором, ізоморфним до ℓ_2.

1933. С. Банах, С. Мазур. Згідно зі знаменитою теоремою Банаха-Мазура (кожний сепарабельний метричний простір ізометрично вкладається в $C[0,1]$, див. [1]), простір $C[0,1]$ має підпростір, ізоморфний до ℓ_1. Кожний такий підпростір має бути недоповнювальним [13].

1934. Г. Фіхтенгольц, Л. Канторович. Простір $C[0,1]$ недоповнювальний у просторі L_∞ [22].

1937. Ф. Муррей. Вперше з'явилася «локальна версія» поняття недоповнювальності. В [41] доведено, що для довільного $p \in (1,2) \cup (2,+\infty)$ існує послідовність $(C_{p,n})_{n=1}^\infty$ додатних чисел, така, що $\lim\limits_{n\to\infty} C_{p,n} = +\infty$ і для довільного p і нескінченно багатьох значень n існує підпростір простору ℓ_p^n, на який норма кожного проектора з ℓ_p^n не менша за $C_{p,n}$ (спробуйте пояснити, чому звідси випливає існування недоповнювального підпростору простору ℓ_p, а також L_p). Окрім «локальної версії», тут ми бачимо перший приклад рефлексивного простору з недоповнювальним підпростором.

З цікавим прикладом недоповнювального підпростору читач може познайомитися у книзі У. Рудіна [8, с. 150]. Крім того, цікаві задачі про доповнювальні підпростори можна знайти у підручнику В. Кадеця [4, с. 301].

3. Базиси Шаудера

3.1. **Означення. Стандартний базис просторів c_0 і ℓ_p при $1 \leq p < \infty$.** На відміну від класичних прикладів, у загальному банаховому просторі за відсутністю подання довільного елементу у якомусь зручному вигляді залишається мало можливостей для дослідження як властивостей простору, так і питань існування операторів із заданими властивостями. Найефективним інструментом у цьому відношенні є поняття базису Шаудера.

Означення 3.1. *Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ елементів банахового простору X називається базисом Шаудера (коротко, – базисом) простору X, якщо для кожного $x \in X$ існує єдина послідовність скалярів $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, така, що*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n. \tag{3.1}$$

Послідовність (x_n) в X, яка є базисом деякого підпростору $X_0 \subseteq X$ (іншими словами, базисом у замиканні своєї лінійної оболонки), називається базисною послідовністю.

З єдиності коефіцієнтів у означенні базису випливає, що $x_n \neq 0$ для всіх n.

Банахів простір X з базисом (x_n) може розглядатися як простір послідовностей: елемент $x \in X$ ототожнюється з послідовністю (a_n) з розкладу (3.1).

Наведемо найпростіший приклад базису для просторів послідовностей. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через e_n послідовність, n-й член якої дорівнює 1, а всі решта – нулі.

Задача 13. *Довести, що (e_n) є базисом у просторах c_0 та ℓ_p при $1 \leq p < \infty$.*

Базис (e_n) називається стандартним базисом цих просторів.

Задача 14. *Довести, що довільний банахів простір з базисом є нескінченновимірним і сепарабельним.*

3.2. **Теорема Банаха про обмеженість базисних проекторів. Базисна константа.** В основній теоремі цього підрозділу йтиметься про n-ті часткові суми розкладу елементів у ряд за даним базисом.

Теорема 3.2 (Банах). *Нехай X – банахів простір з базисом (x_n). Тоді відображення*

$$P_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

є лінійними обмеженими проекторами (див. означення 2.14) для всіх $n \in \mathbb{N}$, причому $\sup\limits_n \|P_n\| < \infty$.

На перший погляд може здаватися, що ця теорема є простим наслідком принципу рівномірної обмеженості. Це справді було б так, якби нам хтось спочатку довів обмеженість операторів P_n.

Доведення. Для кожного $x \in X$ із збіжності ряду (3.1) і неперервності норми (див. задачу 1) випливає

$$|||x||| \overset{def}{=} \sup_n \|P_n x\| = \sup_n \Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big\| < \infty.$$

Доведемо, що $|||\cdot|||$ є нормою на X. Перші дві аксіоми норми очевидні. Доведемо нерівність трикутника:

$$|||x+y||| = \sup_n \|P_n(x+y)\| \le \sup_n\big(\|P_n x\| + \|P_n y\|\big) \le$$

$$\le \sup_n \left(|||x||| + |||y|||\right) = |||x||| + |||y|||.$$

Доведемо тепер повноту X відносно норми $|||\cdot|||$. Нехай $\lim\limits_{n,m\to\infty} |||y_n - y_m||| = 0$, де $y_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k$. Оскільки $x_1 \ne 0$, то з нерівності

$$|a_{n,1} - a_{m,1}|\, \|x_1\| = \|a_{n,1}x_1 - a_{m,1}x_1\| \le |||y_n - y_m|||$$

випливає, що числова послідовність $(a_{n,1})_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною, а отже, існує $a_1 = \lim\limits_n a_{n,1}$. Аналогічно при $s > 1$ з нерівності

$$|a_{n,s} - a_{m,s}|\, \|x_s\| = \big\|P_s(y_n - y_m) - P_{s-1}(y_n - y_m)\big\| \le 2\, |||y_n - y_m|||$$

випливає існування $a_s = \lim\limits_n a_{n,s}$. Доведемо умову Коші для ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ відносно вихідної норми $\|\cdot\|$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$.

Виберемо n_0 так, щоб $|||y_n - y_m||| < \varepsilon/4$ при $n, m \geq n_0$ і виберемо s_0 так, щоби при всіх $s \geq s_0$ і $l \geq 1$ виконувалась нерівність

$$\Big\| \sum_{k=s+1}^{s+l} a_{n_0,k}\, x_k \Big\| < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Нехай $s \geq s_0$ та $l \geq 1$. З неперервності норми випливає, що

$$\Big\| \sum_{k=s+1}^{s+l} a_k x_k \Big\| = \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{k=s+1}^{s+l} a_{n,k}\, x_k \Big\|.$$

Виберемо $m \geq n_0$ так, щоби

$$\Big\| \sum_{k=s+1}^{s+l} a_k x_k \Big\| \leq \Big\| \sum_{k=s+1}^{s+l} a_{m,k} x_k \Big\| + \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Тоді (продовжуємо попередню нерівність)

$$= \Big\| \sum_{k=s+1}^{s+l} a_{n_0,k}\, x_k + P_{s+l}(y_m - y_{n_0}) - P_s(y_m - y_{n_0}) \Big\| + \frac{\varepsilon}{4} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + 2\,|||y_m - y_{n_0}||| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon.$$

Покладемо $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ і доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} |||y_n - y||| = 0$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Виберемо n_1 так, щоб $|||y_n - y_m||| < \varepsilon$ при всіх $n, m \geq n_1$. Зокрема, для кожного $s \geq 1$ маємо

$$\Big\| \sum_{k=1}^{s} (a_{n,k} - a_{m,k}) x_k \Big\| < \varepsilon$$

при всіх $n, m \geq n_1$. Користуючись (вкотре вже!) неперервністю норми, переходимо в останній нерівності до границі при $m \to \infty$ і одержуємо $\|P_s(y_n - y)\| \leq \varepsilon$. Це означає, що $|||y_n - y||| \leq \varepsilon$ при всіх $n \geq n_1$. Отже, X є банаховим простором і відносно норми $||| \cdot |||$.

Оскільки для кожного $x \in X$ маємо

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n x\| \leq \sup_n \|P_n x\| = |||x|||,$$

то тотожне відображення I з $(X, |||\cdot|||)$ в $(X, \|\cdot\|)$ є лінійним обмеженим оператором з одного банахового простору в інший. Згідно з теоремою Банаха про обернений оператор одержуємо, що I^{-1} також є обмеженим оператором, тобто існує число $K \in (0, +\infty)$, таке, що $|||x||| = \sup\limits_n \|P_n x\| \le K \|x\|$ для кожного $x \in X$. $\square$.

Означення 3.3. *Проектори P_n, визначені у теоремі 3.2, називаються базисними проекторами, побудованими за базисом (x_n), а число $\sup\limits_n \|P_n\|$ називається базисною константою базису (x_n).*

Базис з константою 1 називається монотонним.

Іншими словами, базис називається монотонним, якщо для будь-якої послідовності скалярів (a_n) числова послідовність $\left(\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right\|\right)_{n=1}^{\infty}$ є неспадною.

Кожний базис (x_n) є монотонним відносно норми $|||x||| = \sup\limits_n \|P_n x\|$, де P_n – базисні проектори. Дійсно,

$$|||P_n x||| = \sup_m \|P_m P_n x\| = \sup_{1\le m\le n} \|P_m x\| \le |||x|||.$$

Означення 3.4. *Дві норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ на лінійному просторі X називаються еквівалентними, якщо існують числа $\alpha, \beta > 0$, такі, що для кожного $x \in X$*

$$\alpha \|x\|_1 \le \|x_2\| \le \beta \|x\|_1.$$

Таким чином, на будь-якому банаховому просторі з базисом існує еквівалентна норма, відносно якої цей базис є монотонним.

3.3. **Критерій базисності послідовності.** Наступна теорема дає зручний критерій того, що дана послідовність є базисом.

Теорема 3.5. *Послідовність (x_n) елементів банахового простору X є базисом простору X тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні три умови:*

(i) $x_n \ne 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;

(ii) існує число $K \geq 1$, таке, що для довільних номерів $n < m$ і довільних скалярів $(a_k)_1^m$ виконується нерівність

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big\| \leq K \Big\|\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\Big\|;$$

(iii) замикання лінійної оболонки $[x_n]$ послідовності (x_n) збігається з усім X.

Доведення. Необхідність умов (i) та (iii) випливає з означення базису; необхідність (ii) – з теореми 3.2. Зауважимо, що для кожного $x \in X$ єдиність послідовності скалярів (a_n), для якої виконується розклад (3.1), випливає з (i) та (ii): якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0$, то $a_n = 0$ для всіх n. Для доведення існування розкладу довільного елемента $x \in X$ нам потрібна наступна лема.

Лема 3.6. *а) Нехай X – нормований простір, Z – банахів простір; $Y \subseteq X$ – щільний лінійний підпростір і $\tilde{T} \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Існує продовження $T \in \mathcal{L}(X, Z)$ оператора $\tilde{T}$ (тобто $Ty = \tilde{T}y$ для всіх $y \in Y$) зі збереженням норми $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.*

б) Крім того, якщо $\tilde{T}y = \tilde{f}(y)\, z_0$ для всіх $y \in Y$ та деяких фіксованих $\tilde{f} \in Y^*$ і $z_0 \in Z$, то $Tx = f(x)\, z_0$ для всіх $x \in X$ та деякого продовження $f \in X^*$ функціонала $\tilde{f}$.

Доведення леми 3.6. а) Нехай $x \in X$ та $x = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, де $y_n \in Y$. Оскільки

$$\|\tilde{T}y_n - \tilde{T}y_m\| \leq \|\tilde{T}\|\, \|y_n - y_m\|$$

для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, то послідовність $\big(\tilde{T}y_n\big)$ є фундаментальною, а завдяки повноті Z, є збіжною. Покладемо $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{T}y_n$. Доведемо коректність визначення Tx. Нехай $x = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{y}_n$, де $\tilde{y}_n \in Y$. Тоді

$$\|\tilde{T}\tilde{y}_n - \tilde{T}y_n\| \leq \|\tilde{T}\|\, \|\tilde{y}_n - y_n\| \leq \|\tilde{T}\|\big(\|\tilde{y}_n - x\| + \|x - y_n\|\big),$$

звідки одержуємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{T}\tilde{y}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{T}y_n$. Лінійність T випливає з лінійності $\tilde{T}$ і лінійності границі. Переконаємося у тому, що T є продовженням $\tilde{T}$. Нехай $y \in Y$. Тоді $y = \lim_{n\to\infty} y$, а отже, $Ty = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}y = \tilde{T}y$. Доведемо обмеженість T. Нехай $x \in X$, $\ x = \lim_{n\to\infty} y_n$, $\ y_n \in Y$. Тоді

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|\tilde{T}y_n\| \le \|\tilde{T}\| \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \|\tilde{T}\|\,\|x\|.$$

Таким чином, $\|T\| \le \|\tilde{T}\|$. Обернена нерівність випливає з того, що T є продовженням $\tilde{T}$.

б) Нехай $x \in X$, $\ x = \lim_{n\to\infty} y_n$, $\ y_n \in Y$. Тоді

$$Tx = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}y_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(y_n)\, z_0 = a\, z_0, \quad \text{де} \quad a = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(y_n). \quad \square$$

Зауважимо, що можна легко довести єдиність неперервного продовження лінійного обмеженого оператора, визначеного на щільному лінійному підпросторі.

Продовження доведення теореми 3.5. Позначимо через X_0 множину всіх елементів $x \in X$, для яких існує послідовність скалярів (a_n), така, що $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Згідно з (iii), лінійний підпростір X_0 є щільним в X. Визначимо на X_0 оператори $\tilde{P}_n$ та $\tilde{Q}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ за правилом:

$$\tilde{P}_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \quad \tilde{Q}_1 = P_1, \quad Q_{n+1} = \tilde{P}_{n+1} - \tilde{P}_n,$$

тобто $\tilde{Q}_n\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k\Big) = a_n x_n$.

З (ii) випливає, що $\tilde{P}_n$, $\tilde{Q}_n \in \mathcal{L}(X_0, X)$, причому $\|\tilde{P}_n\| \le K$. Згідно з лемою 3.6, існують продовження P_n, $Q_n \in \mathcal{L}(X)$ операторів $\tilde{P}_n$ та $\tilde{Q}_n$ відповідно, причому $Q_n x = f_n(x)\, x_n$ для кожного $x \in X$, де $f_n \in X^*$.

Нехай $x \in X$. Доведемо, що $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, x_k$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \|x - P_n x\| = \lim_{n\to\infty} \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} Q_k x \Big\| = 0.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. З (iii) випливає існування $m \in \mathbb{N}$ і скалярів $(b_k)_{k=1}^m$ таких, що

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{K+1}, \quad \text{де} \quad y = \sum_{k=1}^{m} b_k x_k.$$

Тоді при $n \geq m$, враховуючи, що $P_n y = y$, одержуємо

$$\|x - P_n x\| \leq \|x - y\| + \|P_n y - P_n x\| < \frac{\varepsilon}{K+1} + \|P_n\| \frac{\varepsilon}{K+1} \leq \varepsilon. \quad \square$$

Наслідок 3.7. *Послідовність (x_n) елементів банахового простору X є базисною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (i) та (ii) теореми 3.5.*

Наслідок 3.8. *Послідовність (x_n) елементів банахового простору X є монотонною базисною тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:*

(i) *$x_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *для довільного $n \in \mathbb{N}$ і довільних скалярів $(a_k)_1^{n+1}$*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big\| \leq \Big\|\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k\Big\|$$

Аналогічно, для монотонного базису додається умова (iii) теореми 3.5.

Задача 15. *Використовуючи критерій базисності, довести, що довільний ізоморфізм (ізоморфне вкладення) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ між банаховими просторами X та Y переводить довільний базис (базисну послідовність з) простору X у деякий базис (базисну послідовність з) простору Y. При цьому, якщо K – базисна константа послідовності (x_n) з X, то базисна константа послідовності (Tx_n) в Y не перевищує $K\|T\|\|T^{-1}\|$.*

Означення 3.9. *Базис (базисна послідовність) (x_n) банахового простору X називається нормованим, якщо $\|x_n\| = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.*

Легко бачити, що якщо (x_n) – базис (базисна послідовність), то $(x_n/\|x_n\|)$ – нормований базис (базисна послідовність).

Задача 16. *Довести, що стандартний базис просторів* c_0 *і* ℓ_p *при* $1 \le p < \infty$ *є монотонним і нормованим (див. задачу 13).*

Визначимо одну з найважливіших у теорії функціональних просторів систему функцій – систему Гаара.

Приклад 9. *Визначимо наступні функції на відрізку* $[0,1]$ *формулами:* $h_1(t) \equiv 1$ *та для* $k = 0,1,2,\dots,$ $l = 1,2,\dots,2^k$

$$h_{2^k+l}(t) = \begin{cases} 1 \ \text{якщо} \ t \in [\frac{2l-2}{2^{k+1}}, \frac{2l-1}{2^{k+1}}] \\ -1 \ \text{якщо} \ t \in (\frac{2l-1}{2^{k+1}}, \frac{2l}{2^{k+1}}] \\ 0 \ \text{в інших випадках} \end{cases} =$$

$$= \chi\Big[\frac{2l-2}{2^{k+1}}, \frac{2l-1}{2^{k+1}}\Big] - \chi\Big(\frac{2l-1}{2^{k+1}}, \frac{2l}{2^{k+1}}\Big].$$

Задача 17. *Користуючись критерієм базисності, довести, що система Гаара є монотонним базисом у просторах* L_p *при* $1 \le p < \infty$.

Задача 18. *Нехай* (x_n) *– базис банахового простору* X. *Довести, що координатні функціонали*

$$x_n^*\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\Big) = a_n$$

є лінійними обмеженими функціоналами з оцінкою для норм

$$\|x_n^*\| \le \frac{2K}{\|x_n\|},$$

де K *– базисна константа. Довести також, що ця оцінка є точною.*

Означення 3.10. *Координатні функціонали* (x_n^*), *визначені у задачі 18, називаються біортогональними функціоналами до базису* (x_n).

Задача 19. *Нехай* (x_n) *– базис банахового простору* X. *Довести, що функціонали* $f_n \in X^*$, $n \ge 1$ *є біортогональними до* (x_n) *тоді і тільки тоді, коли* $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$, *де* $\delta_{i,j}$ *– символ Кронекера.*

3.4. **Теорема Крейна-Мільмана-Рутмана про стійкість базисів.** Зміст основної теореми цього пункту надзвичайно простий: якщо дана послідовність «близька» до деякого базису, то вона сама є базисом. Крім ідейної простоти, ця теорема відзначається величезною кількістю застосувань. Але перед точним її формулюванням ми наведемо деякі означення.

Означення 3.11. *Два базиси:* (x_n) *банахового простору* X *та* (y_n) *банахового простору* Y *називаються:*

- еквівалентними, якщо існує ізоморфізм $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*, для якого* $Tx_n = y_n$ *при всіх* n*;*

- λ*-еквівалентними, якщо* $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda$ *в означенні еквівалентності.*

Зауважимо, що для довільного ізоморфізму $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ маємо $\|T\|\|T^{-1}\| \geq 1$. Дійсно, з означення норми оператора одержуємо $\|T \cdot S\| \leq \|T\|\|S\|$ для композиції довільних операторів S і T, а отже, $1 = \|I\| = \|T \cdot T^{-1}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\|$. Таким чином, $\lambda \geq 1$ в означенні λ-еквівалентності.

Твердження 3.12. *Еквівалентність базисів* (x_n) *банахового простору* X *та* (y_n) *банахового простору* Y *рівносильна такій умові: для довільної послідовності скалярів* (a_n) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *збігається в* X *тоді і тільки тоді, коли ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ *збігається у просторі* Y.

Доведення. Дійсно, якщо базиси еквівалентні, то з нерівностей

$$\Big\| \sum_{k=n+1}^{n+l} a_k x_k \Big\| \leq \|T^{-1}\| \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+l} a_k y_k \Big\| \leq \|T\|\|T^{-1}\| \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+l} a_k x_k \Big\|$$

отримуємо одночасну збіжність або розбіжність відповідних рядів.

Навпаки, якщо збіжність рядів по базисах є еквівалентною, то лінійний ізоморфізм з X в Y, який продовжує рівність $Tx_n = y_n$ є коректно визначеним. Обмеженість цього ізоморфізму, а також оберненого до нього лінійного оператора, випливають з теореми Банаха про замкнений графік. $\square$

Теорема 3.13 (Крейна-Мільмана-Рутмана). *Нехай* (x_n) – *нормована базисна послідовність банахового простору* X *з базисною константою* K. *Якщо послідовність* (y_n) *елементів* X *задовольняє*

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{2K},$$

то вона також є базисною, еквівалентною до (x_n). *Більш того, існує ізоморфне вкладення* T *підпростору* $X_0 = [x_n] \subseteq X$ *в* X, *для якого* $Tx_n = y_n$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$, *причому*

$$\|T\|\|T^{-1}\| \leq \frac{1 + 2Kd}{1 - 2Kd}.$$

Зокрема, константа еквівалентності прямує до 1 *при* $d \to 0$.

Якщо, крім цього, (x_n) *є базисом в* X, *то* (y_n) *також є базисом в* X.

Доведення. Для довільного $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X_0$ задамо $Tx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ $\Big($ збіжність останнього ряду випливає з таких нерівностей

$$\Big\|\sum_{k=n+1}^{n+l} a_k y_k\Big\| \leq \Big\|\sum_{k=n+1}^{n+l} a_k x_k\Big\| + \Big\|\sum_{k=n+1}^{n+l} a_k (x_k - y_k)\Big\| \leq \Big\|\sum_{k=n+1}^{n+l} a_k x_k\Big\| +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{n+l} |a_k| \, \|x_k - y_k\| \leq \ (\text{див. задачу 18}) \ \leq$$

$$\leq \Big\|\sum_{k=n+1}^{n+l} a_k x_k\Big\| + 2K\|x\| \sum_{k=n+1}^{n+l} \|x_k - y_k\| \, . \Big)$$

Для кожного $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X_0$ маємо

$$\|x - Tx\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, \|x_n - y_n\| \leq 2K\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| = 2Kd\|x\|.$$

Тому при $x \neq 0$ одержуємо

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\| + \|x - Tx\|}{\|x\|} \leq 1 + 2Kd,$$

а отже, T є обмеженим оператором з $\|T\| \le 1 + 2Kd$. З іншого боку,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \frac{\|x\| - \|x - Tx\|}{\|x\|} \ge 1 - 2Kd.$$

Враховуючи умову $2Kd < 1$, одержуємо обмеженість T^{-1} з оцінкою $\|T^{-1}\| \le \big(1 - 2Kd\big)^{-1}$.

Останнє твердження теореми випливає з наступної леми. $\square$

Лема 3.14. *Нехай T – лінійний неперервний оператор у банаховому просторі X, причому $\|I - T\| < 1$, де I – тотожний оператор в X. Тоді T – ізоморфізм простору X на себе.*

Доведення. Покладемо $Q = I - T$. Оскільки $\|Q\| < 1$, то ряд $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Q^k$, очевидно, задовольняє умову Коші, а отже, збігається. Позначивши $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} Q^k$, безпосереднім обчисленням одержуємо

$$TS_n = (I - Q)(I + Q + Q^2 + \ldots + Q^n) = I - Q^{n+1} \;\; \to \;\; I$$

і так само $S_n T = I - Q^{n+1} \to I$ при $n \to \infty$. Отже, $TS = ST = I$. $\square$

3.5. **Техніка виділення базисних послідовностей.** Проблема існування базиса у кожному нескінченновимірному сепарабельному банаховому просторі досить складна і була розв'язана негативно лише у 1972 р. Проте як побудувати базисну послідовність, ще й з деякими наперед заданими властивостями, було відомо ще засновникам теорії банахових просторів.

Означення 3.15. *Нехай (x_n) – базисна послідовність банахового простору X; (a_n) – послідовність скалярів і $0 \le k_1 < k_2 < \ldots$ – натуральні числа. Послідовність (u_n) ненульових векторів з X*

$$u_n = \sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} a_i x_i$$

називається блок-базисом послідовності (x_n).

Задача 20. *Довести, що блок-базис будь-якої базисної послідовності також є базисною послідовністю, базисна константа якої не перевищує базисної константи вихідної послідовності.*

Теорема 3.16 (Бесаґи-Пелчиньського). *Нехай (x_n) – базис банахового простору X. Для довільного нескінченновимірного підпростору $Y \subseteq X$ і довільного $\varepsilon > 0$ існує підпростір $Z \subseteq Y$ з базисом, який є $(1+\varepsilon)$-еквівалентним до деякого блок-базису базису (x_n).*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і довільний нескінченновимірний підпростір $Y \subseteq X$. Зауважимо, що довільний ко-скінченновимірний лінійний підпростір (тобто $X = X_1 \oplus X_2$ для деякого скінченновимірного лінійного підпростору $X_2 \subseteq X$) $X_1 \subseteq X$ має ненульовий перетин з довільним нескінченновимірним підпростором $X_3 \subseteq X$ (якщо б це було не так, то фактор-простір X/X_1 був би одночасно скінченновимірним і нескінченновимірним). Отже, для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдеться елемент $y \in Y$ вигляду $y = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k x_k$.

Виберемо $\delta > 0$ так, щоби $\delta < (2K)^{-1}$ і

$$\frac{1+2K\delta}{1-2K\delta} \leq 1+\varepsilon,$$

де K – базисна константа базису (x_n).

Побудуємо одночасно дві послідовності (y_n) та (u_n). Виберемо довільно $\tilde{y}_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{1,k} x_k \in Y \setminus \{0\}$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1,k} x_k - \tilde{y}_1\right\|}{\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1,k} x_k\right\|} = 0,$$

то можна вибрати $n_1 \in \mathbb{N}$ так, щоби для $\tilde{u}_1 = \sum\limits_{k=1}^{n_1} a_{1,k} x_k$ ми отримали $\|\tilde{u}_1\|^{-1}\|\tilde{u}_1 - y_1\| < \delta/2$. Тоді для $y_1 = \tilde{y}_1/\|\tilde{u}_1\|$ і $u_1 = \tilde{u}_1/\|\tilde{u}_1\|$ ми будемо мати $\|u_1\| = 1$ і $\|u_1 - y_1\| < \delta/2$.

На другому кроці виберемо $\tilde{y}_2 = \sum\limits_{k=n_1+1}^{\infty} a_{2,k} x_k \in Y \setminus \{0\}$, а також $n_2 \in \mathbb{N}$ так, щоби для $\tilde{u}_2 = \sum\limits_{k=1}^{n_1} a_{1,k} x_k$ ми отримали $\|\tilde{u}_2\|^{-1}\|\tilde{u}_2 - y_2\| <$

$\delta/4$. Тоді для $y_2 = \tilde{y}_2/\|\tilde{u}_2\|$ і $u_2 = \tilde{u}_2/\|\tilde{u}_2\|$ ми будемо мати $\|u_2\| = 1$ і $\|u_2 - y_2\| < \delta/4$.

Продовжуючи процедуру побудови очевидним чином, побудуємо нормований блок-базис (u_n) базису (x_n) (який є базисною послідовністю з базисною константою $\leq K$, згідно з результатом задачі 20) та послідовність (y_n) в Y, для яких $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|u_n - y_n\| < \delta$. Згідно з теоремою Крейна-Мільмана-Рутмана, (y_n) є базисною послідовністю, $(1+\varepsilon)$-еквівалентною до (u_n). Залишається покласти $Z = [y_n]$. $\Box$

3.6. **Натягуючі і обмежено повні базиси.** У цьому підрозділі ми познайомимося з базисними властивостями біортогональних функціоналів до деякого базису. Зокрема, нас цікавить, чи завжди вони утворюють:

– базисну послідовність?

– базис?

Теорема 3.17. *Нехай (x_n) – базис банахового простору X з базисною константою K. Тоді біортогональні функціонали (x_n^*) утворюють в X^* базисну послідовність з константою K.*

Доведення. Нехай (P_n) – відповідні базисні проектори в X. Доведемо, що

$$P_n^*\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k^*\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^* \quad \text{при} \quad n < m. \tag{3.2}$$

Дійсно, за означенням спряженого оператора, для довільного $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x_i \in X$ маємо

$$P_n^*\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k^*\Big)x = \Big(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k^*\Big)P_n x = \Big(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k^*\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

З іншого боку,

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^*\Big)x = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^*\Big)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Таким чином, (3.2) встановлено. Враховуючи, що $\|P_n^*\| = \|P_n\|$, доведемо умову (ii) критерію базису для (x_n^*). При $n < m$, використовуючи (3.2), одержимо

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^*\Big\| = \Big\|P_n^*\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k^*\Big)\Big\| \leq \|P_n^*\| \Big\|\sum_{k=1}^{m} a_k x_k^*\Big\| \leq K \Big\|\sum_{k=1}^{m} a_k x_k^*\Big\|.$$

Згідно з наслідком 3.7 критерію базису, (x_n^*) є базисною послідовністю. Зазначимо, що з (3.2) також випливає, що звуження операторів P_n^* на підпростір $[x_i^*] \subseteq X^*$, збігаються з базисними проекторами базисної послідовності (x_n^*). А отже, з рівності $\sup\limits_n \|P_n^*\| = \sup\limits_n \|P_n\| = K$ випливає рівність базисних констант. □

Означення 3.18. *Базис (x_n) банахового простору X називається:*
– натягуючим, якщо його біортогональні функціонали (x_n^*) утворюють базис в X^*, тобто (див. теорему 3.21) якщо $[x_n^*] = X^*$;
– обмежено повним, якщо для кожної послідовності скалярів (a_n) з умови

$$\sup_n \Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big\| < \infty$$

випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

Задача 21. *З'ясувати, чи є стандартний базис просторів c_0 та ℓ_p при $1 \leq p < \infty$ натягуючим? Обмежено повним?*

Нагадаємо, що послідовність (f_n) елементів спряженого X^* до нормованого простору X називається *слабко* збіжною* до елемента $f \in X^*$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для довільного $x \in X$ (позначається $f = w^* - \lim\limits_{n\to\infty} f_n$). Якщо простір X є рефлексивним, то на X^* слабка і слабка* збіжності співпадають, але взагалі кажучи, як легко бачити з означень, з слабкої збіжності випливає слабка* збіжність до тієї ж границі.

Задача 22. *Довести, що стандартний базис простору ℓ_1 прямує слабко* до нуля, але не має слабкої границі (простір ℓ_1 тут ми розглядаємо як спряжений до c_0).*

Твердження 3.19. *Нехай (x_n) – базис банахового простору X з біортогональними функціоналами (x_n^*). Тоді для кожного $f \in X^*$*

$$f = w^* - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, x_k^*. \tag{3.3}$$

Доведення. Зафіксуємо довільні $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)\, x_n$ та $f \in X^*$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, x_k^*(x) = \lim_{n\to\infty} f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^*(x)\, x_k\Big) = f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)\, x_n\Big) = f(x). \ \Box$$

Таким чином, якщо базис (x_n) не є натягуючим, то рівність (3.3) не може виконуватися у розумінні збіжності за нормою для $f \in X^* \setminus [x_n^*]$.

Твердження 3.20. *Нехай (x_n) – натягуючий базис банахового простору X. Тоді біортогональні функціонали (x_n^*) утворюють обмежено повний базис в X^*.*

Доведення базується на теоремі Банаха-Алаоглу, для формулювання якої потрібно нагадати означення слабкої* топології. Базу околів нуля слабкої* топології у спряженому просторі X^* до нормованого простору X утворюють такі множини:

$$\big\{f \in X^* : \ |f(x_1)| < \varepsilon \wedge \ldots \wedge |f(x_n)| < \varepsilon\big\}, \quad \text{де } n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in X$$

та $\varepsilon > 0$.

Теорема 3.21 (Банаха-Алаоглу; випадок нормованих просторів)**.** *Одинична куля $B(X^*)$ спряженого до нормованого простору X компактна у слабкій* топології.*

Доведення теореми Банаха-Алаоглу наводиться у спецкурсі «Топологічні векторні простори».

Доведення твердження 3.20. Нехай

$$\sup_n \Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^*\Big\| < \infty.$$

Згідно з теоремою Банаха-Алаоглу, існує слабко* гранична точка $f \in X^*$ послідовності $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k^*\Big)$. Оскільки (x_n^*) утворює базис в X^*, то

$f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x_n)\, x_n^*$. Для збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n^*$ доведемо, що $a_n = f(x_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Дійсно, за означенням граничної точки, для кожного n та кожного $\varepsilon > 0$ існує номер $m \geq n$, такий, що

$$\Big|\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k^*\Big)(x_n) - f(x_n)\Big| < \varepsilon, \quad \text{тобто,} \ \ |a_n - f(x_n)| < \varepsilon. \ \square$$

3.7. **Критерій рефлексивності Джеймса простору з базисом.** Спочатку ми наведемо один добре відомий і відносно простий критерій рефлексивності. Дуже схожим на означення слабкої* топології на X^* є означення слабкої топології на нормованому просторі X, базу околів нуля якої складають множини

$$\big\{x \in X : \ |f_1(x)| < \varepsilon \wedge \ldots \wedge |f_n(x)| < \varepsilon\big\}, \quad \text{де } \ n \in \mathbb{N}, \ \ f_1, \ldots, f_n \in X^*$$

та $\varepsilon > 0$.

Звичайно, збіжність у слабкій топології – це слабка збіжність. Проте на відміну від того, що слабка і сильна збіжності на нескінченновимірному банаховому просторі можуть співпадати (наприклад, у просторі ℓ_1), слабка топологія співпадає з нормованою тільки для скінченновимірних просторів (дійсно, якщо $\dim X = \infty$, то довільний окіл нуля в слабкій топології простору X є необмеженим за нормою, оскільки він містить перетин ядер функціоналів, задіяних в означенні околу, який є ко-скінченновимірним підпростором X, згідно з твердженням 2.9).

Теорема 3.22. *Для рефлексивності банахового простору X необхідно і достатньо, щоби його одинична куля $B(X)$ була компактна у слабкій топології.*

Доведення. Нехай $\tau : X \to X^{**}$ – канонічне відображення (див. задачу 3). Зауважимо, що рефлексивність простору X еквівалентна до рівності $\tau\big(B(X)\big) = B(X^{**})$.

Необхідність. Нехай X є рефлексивним. Тоді $B(X^{**})$ є компактною множиною у слабкій* топології, згідно з теоремою Банаха-Алаоглу. Але завдяки рефлексивності, околи нуля у слабкій топології простору X за допомогою відображення τ переходять саме в околи нуля слабкої* топології на X^{**}.

Доведення достатності використовує таку теорему, яка наводиться у спецкурсі «Топологічні векторні простори».

Теорема 3.23 (Теорема про біполяру; випадок нормованих просторів)**.** *Нехай X – нормований простір. Визначимо поляру E° довільної множини $E \subseteq X$, визначивши*

$$E^\circ = \big\{ f \in X^* : \ |f(x)| \le 1 \quad \text{для кожного } x \in E \big\}$$

та її біполяру $E^{\circ\circ}$ як поляру від поляри E°:

$$E^{\circ\circ} = \big\{ z \in X^{**} : \ |z(f)| \le 1 \quad \text{для кожного } f \in E^\circ \big\}.$$

Тоді $E^{\circ\circ}$ збігається із слабким* замиканням абсолютно опуклої оболонки множини $\tau(E)$ в X^{**}.

Достатність. Нехай $B(X)$ є слабко компактною. З теореми про біполяру випливає, що біполяра одиничної кулі $B(X)^{\circ\circ}$ збігається із слабким* замиканням множини $\tau\big(B(X)\big)$ в X^{**}. Оскільки $B(X)$ є слабко компактною, то $\tau\big(B(X)\big)$ є слабко* компактною підмножиною X^{**}, а отже, і слабко* замкненою. Таким чином, $B(X)^{\circ\circ} = \tau\big(B(X)\big)$. З іншого боку, за означенням біполяри, $B(X)^{\circ\circ} = B(X^{**})$. Отже, $\tau\big(B(X)\big) = B(X^{**})$. $\square$

Для доведення основної теореми цього підрозділу нам потрібна наступна лема.

Лема 3.24. *Нехай E – опукла множина у нормованому просторі X. Тоді замикання $\mathrm{cl}\,(E)$ дорівнює її слабкому замиканню $\mathrm{w\,cl}\,(E)$.*

Доведення. Нехай, навпаки, існує $x_0 \in \mathrm{w\,cl}\,(E) \setminus \mathrm{cl}\,(E)$. Згідно з теоремою Гана-Банаха 4, існують $f \in X^*$ та дійсні числа α, β такі, що

$$\mathrm{Re}\, f(x_0) \le \alpha < \beta \le \mathrm{Re}\, f(x)$$

для кожного $x \in \mathrm{cl}\,(E)$. Тоді слабкий окіл точки x_0

$$\big\{ x \in X : \quad |f(x) - f(x_0)| < \beta - \alpha \big\}$$

не містить елементів множини E. Отже, $x_0 \notin \mathrm{w\,cl}\,(E)$, – суперечність. $\square$

З леми 3.24 випливає, що слабке замикання лінійного підпростору нормованого простору завжди збігається з його нормованим замиканням, чого не можна стверджувати про слабке* замикання.

Задача 23. *Довести, що слабке* замикання множини c_0 у просторі ℓ_∞ – це все ℓ_∞.*

Теорема 3.25 (Критерій рефлексивності Джеймса)**.** *Банахів простір X з базисом (x_n) є рефлексивним тоді і тільки тоді, коли базис (x_n) є одночасно натягуючим і обмежено повним.*

Доведення. Нехай $\tau : X \to X^{**}$ – канонічне відображення і (x_n^*) – функціонали, біортогональні до (x_n).

Припустимо, що простір X є рефлексивним. Доведемо спочатку, що базис (x_n) є натягуючим. Оскільки на X^* слабка та слабка* топології однакові, то твердження 3.19 разом з лемою 3.24 гарантують потрібну рівність $[x_n^*] = X^*$.

Доведемо обмежену повноту базису (x_n). Оскільки $\big(\tau(x_n)\big)$ є функціоналами, біортогональними до (x_n^*) та $\tau(X) = X^{**}$, то базис (x_n^*) простору X^* є натягуючим за означенням. Отже, з твердження 3.20 випливає, що базис $\big(\tau(x_n)\big)$ простору X^{**} є обмежено повним, чого достатньо внаслідок рефлексивності простору X.

Нехай базис (x_n) простору X є натягуючим і обмежено повним. Доведемо рефлексивність X. Зафіксуємо довільний елемент $h \in X^{**}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} h(x_k^*)\, x_k\Big\| = \sup_{f\in S(X^*)}\Big|\sum_{k=1}^{n} h(x_k^*) f(x_k)\Big| =$$

$$= \sup_{f\in S(X^*)}\Big|h\Big(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, x_k^*\Big)\Big| \le \sup_{f\in S(X^*)} \|h\|\, \Big\|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, x_k^*\Big\| \le K\, \|h\|\,.$$

Оскільки послідовність $\Big(\Big\|\sum\limits_{k=1}^{n} h(x_k^*)\, x_k\Big\|\Big)$ є обмеженою і базис (x_n) є обмежено повним, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h(x_n^*)\, x_n$ збігається до деякого елемента $x \in X$. Для доведення рівності $\tau(x) = h$ доведемо, що $\big(\tau(x)\big)(x_m^*) = h(x_m^*)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$ $\big($цього буде достатньо, тому що $X^* = [x_n]\,\big)$. Дійсно,

$$\big(\tau(x)\big)(x_m^*) = x_m^*(x) = x_m^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} h(x_n^*)\, x_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} h(x_n^*)\, x_m^*(x_n) = h(x_m^*). \;\square$$

Зауважимо, що метод доведення рефлексивності у теоремі 3.25 дозволяє довести наступну теорему.

Теорема 3.26. *Банахів простір X з обмежено повним базисом (x_n) є ізоморфним до деякого спряженого простору.*

3.8. **Безумовно збіжні ряди у банахових просторах.** Нагадаємо, що числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ є абсолютно збіжним тоді і тільки тоді, коли для довільної перестановки натурального ряду $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ (властивість абсолютно збіжних рядів + теорема Рімана). Виявляється, що відносно рядів у банахових просторах ці властивості залишаються вірними лише у скінченновимірному випадку.

Означення 3.27. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ елементів нормованого простору X називається:*

– абсолютно збіжним, якщо збігається числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$;

– безумовно збіжним, якщо для довільної перестановки натурального ряду $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$.

Твердження 3.28. *Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ у банаховому просторі X збігається абсолютно, то він збігається безумовно.*

Доведення. Нехай φ – довільна перестановка натурального ряду. З відповідної теореми для числових рядів випливає збіжність, а отже, і фундаментальність числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_{\varphi(n)}\|$. Далі залишається скористатися нерівністю

$$\Big\| \sum_{k=n+1}^{n+l} x_{\varphi(k)} \Big\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} \|x_{\varphi(k)}\|$$

та повнотою простору X. $\square$

Твердження 3.29. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *у банаховому просторі* X *збігається абсолютно (або безумовно), то існує єдиний елемент* $x \in X$*, який називається сумою ряду (записується це так:* $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$*), такий, що для довільної перестановки натурального ряду* φ *сума ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ *дорівнює* x*.*

Доведення. Згідно з твердженням 3.28, достатньо розглянути лише випадок безумовно збіжного ряду. Нехай, навпаки, існують дві перестановки φ_i, $i = 1, 2$, такі, що $y_1 \neq y_2$, де $y_i = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\varphi_i(n)}$. Використовуючи аналітичну форму теореми Гана-Банаха, виберемо $f \in X^*$ так, щоб $f(y_1) \neq f(y_2)$. Тоді для числових рядів умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\big(x_{\varphi_1(n)}\big) = f(y_1) \neq f(y_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f\big(x_{\varphi_2(n)}\big)$$

суперечить їх абсолютній збіжності. $\square$

Задача 24. *Розглянемо у просторі* ℓ_p, $1 < p < \infty$ *послідовність* $x_n = (0, \ldots, 0, \frac{1}{n}, 0, \ldots)$*, де ненульова координата стоїть на* n*-му місці. Довести, що ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *збігається безумовно, але не збігається абсолютно.*

Можна довести, що безумовна збіжність ряду у банаховому просторі X еквівалентна до його абсолютної збіжності тоді і тільки тоді, коли $\dim X < \infty$. Однак ми обмежимося лише властивостями, необхідними для поняття безумовної збіжності.

Теорема 3.30. *Нехай* (x_n) *– послідовність елементів банахового простору* X*. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

(i) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *збігається безумовно;*

(ii) *для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує скінченна підмножина* $I \subset \mathbb{N}$*, така, що* $\Big\|\sum\limits_{i \in J} x_i\Big\| < \varepsilon$ *для довільної скінченної множини* $J \subset \mathbb{N} \setminus I$*;*

(iii) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ *збігається для довільної послідовності номерів* $1 \le k_1 < k_2 < \ldots$*;*

(iv) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ *збігається для довільного набору знаків* $\theta_n = \pm 1,\ \ n \in \mathbb{N}$*;*

(v) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ *збігається для довільних скалярів* α_n *з умовою* $\sup\limits_n |\alpha_n| < \infty$.

Доведення. Зауважимо, що заперечення умови (ii) означає наступне:

$(*)$ існують $\delta > 0$ і послідовність (I_n) скінченних підмножин $\mathbb{N}$, такі, що

$$q_n = \max I_n < p_{n+1} = \min I_{n+1} \quad \text{та} \quad \Big\| \sum_{i \in I_n} x_i \Big\| \ge \delta$$

для всіх n.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Припустимо, навпаки, що виконується $(*)$. Покладемо $J_n = \{p_n, p_n + 1, \ldots, q_n\}$ та позначимо через k_n кількість елементів множини I_n. З $(*)$ випливає, що $I_n \subseteq J_n$ для всіх n, а також, що (J_n) – попарно неперетинні скінченні підмножини $\mathbb{N}$. Побудуємо перестановку $\varphi : \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, яка кожну множину J_n переводить у себе, причому

$$\varphi^{-1}(I_n) = \{p_n, p_n + 1, \ldots, p_n + k_n - 1\}.$$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ не може бути фундаментальним, оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \sum_{j=p_n}^{p_n+k_n-1} x_{\varphi(j)} \Big\| = \Big\| \sum_{i \in I_n} x_i \Big\| \ge \delta,$$

– суперечність.

Імплікації $(ii) \Rightarrow (i)$ та $(ii) \Rightarrow (iii)$ легко випливають з критерію Коші збіжності ряду.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Припустимо, навпаки, що виконується $(*)$. Визначивши $I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, з умови $(*)$ одержимо розбіжність ряду $\sum\limits_{n \in I} x_n$ згідно з критерієм Коші.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Покладемо $J = \{n \in \mathbb{N} : \ \theta_n = 1\}$. Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n = \sum_{n \in J} x_n - \sum_{n \notin J} x_n$$

збігається як різниця збіжних рядів.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Покладемо $J = \{k_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, $\theta_i = 1$ при $i \in J$ та $\theta_i = -1$ при $i \in \mathbb{N} \setminus J$. Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n} = \sum_{n \in J} x_n = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n\Big)$$

збігається як сума збіжних рядів.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Вважаємо, що $|\alpha_n| \leq 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$; інакше помножимо ряд на $\Big(\sup\limits_n |a_n|\Big)^{-1}$. З доведеного вище випливає, що умови (i), (ii) та (iii) також виконуються. Розглянемо спочатку дійсний випадок $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Покладемо $I = \{n \in \mathbb{N} : \ \alpha_n \geq 0\}$. З (iii) випливає, що ряди $\sum\limits_{n \in J} x_n$, $\sum\limits_{n \notin J} x_n$ збігаються. Отже, достатньо розглянути випадок $\alpha_n \geq 0$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Запишемо α_n у двійковій системі:

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{n,i}\, 2^{-i}, \quad \text{де } \ \alpha_{n,i} \in \{0, 1\}.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Виберемо згідно з умовою (ii) таку скінченну множину $I_0 \subset \mathbb{N}$, що нерівність $\Big\|\sum\limits_{n \in J} x_n\Big\| < \varepsilon$ має місце для довільної скінченної множини $J \subset \mathbb{N} \setminus I_0$. Тоді для довільної скінченної множини $J \subset \mathbb{N} \setminus I_0$ отримаємо

$$\Big\|\sum_{n \in J} \alpha_n x_n\Big\| = \Big\|\sum_{n \in J} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{n,i}\, 2^{-i} x_n\Big\| = \text{(оскільки перша сума є скінчен-}$$

$$\text{ною}) = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \sum_{n\in J} \alpha_{n,i}\, x_n\right\| \le \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \left\|\sum_{n\in J} \alpha_{n,i}\, x_n\right\| < \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \varepsilon,$$

оскільки $\sum\limits_{n\in J} \alpha_{n,i}\, x_n = \sum\limits_{n\in J_i} x_n$, де $J_i = \{n \in J : \ \alpha_{n,i} = 1\} \subseteq J \subset \mathbb{N} \setminus I_0$.

Згідно з умовою (ii), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ є (безумовно) збіжним.

Комплексний випадок зводиться до дійсного за допомогою рівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\,(\alpha_n)\, x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\,(\alpha_n)\, x_n.$$

Імплікація $(v) \Rightarrow (iv)$ є тривіальною, адже (iv) є частковим випадком (v). $\square$

3.9. **Безумовні базиси.**

Означення 3.31. *Базис (базисна послідовність) (x_n) банахового простору X називається безумовним базисом (безумовною базисною послідовністю), якщо для кожного $x \in X$ $\Big(x \in [x_n]\Big)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$ збігається безумовно, де (x_n^*) – біортогональні функціонали.*

Наступне твердження випливає з теореми 3.30.

Наслідок 3.32. *Для базисної послідовності (x_n) у банаховому просторі X наступні умови є еквівалентними:*

(i) *вона є безумовною;*

(ii) *для довільної перестановки $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ послідовність $(x_{\varphi(n)})$ є базисною;*

(iii) *для довільної множини $I \subseteq \mathbb{N}$ і довільної послідовності скалярів (a_n) із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n\in I} a_n x_n$;*

(iv) *для довільних послідовностей скалярів* (a_n) *і* (b_n) *таких, що* $|b_n| \leq |a_n|$, *із збіжності ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *випливає збіжність ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x_n$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ є очевидною.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n = x$ є збіжним. Тоді він збігається безумовно. Дійсно, нехай $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – довільна перестановка. Оскільки послідовність $(x_{\varphi(n)})$ є базисною і $x \in [x_{\varphi(n)}]$, то

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x^*_{\varphi(n)}(x)\, x_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}\, x_{\varphi(n)}.$$

Еквівалентності $(i) \Leftrightarrow (iii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливають з відповідних еквівалентностей теореми 3.30. $\square$

Твердження 3.33. *Нехай* (x_n) *– безумовна базисна послідовність у банаховому просторі* X.

(i) *Для кожної множини* $I \subseteq \mathbb{N}$ *формулою*

$$P_I\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\Big) = \sum_{n \in I} a_n x_n$$

визначається лінійний обмежений проектор P_I *у просторі* $[x_n]$.

(ii) *Для кожного набору знаків* $\Theta = (\theta_n)$ *формулою*

$$M_\Theta\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n$$

визначається лінійний обмежений оператор M_Θ *у просторі* $[x_n]$.

(iii) $$\sup_I \|P_I\| \leq \sup_\Theta \|M_\Theta\| \leq 2 \sup_I \|P_I\| < \infty.$$

Доведення. (i) Коректність визначення P_I випливає з умови (iii) наслідку 3.32. Лінійність та означення проектора $P_I^2 = P_I$ перевіряється тривіально. Доведемо замкненість графіка оператора

P_I. Нехай
$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\, x_k \longrightarrow y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{при } n \to \infty$$
та
$$P_I y_n = \sum_{k\in I}^{\infty} a_{n,k}\, x_k \longrightarrow z = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k \quad \text{при } n \to \infty.$$

З неперервності біортогональних функціоналів x_k^* одержуємо
$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = a_k \text{ для довільного } k \in \mathbb{N};$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = b_k \text{ для довільного } k \in I,$$
а також
$$0 = \lim_{n\to\infty} 0 = b_k \text{ для довільного } k \in \mathbb{N} \setminus I.$$
Отже,
$$P_I y = \sum_{k\in I} a_k x_k = \sum_{k\in I} b_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k = z.$$
Згідно з теоремою Банаха про замкнений графік, оператор P_I є обмеженим.

(ii) доводиться аналогічно з використанням умови (iv) наслідку 3.32.

(iii) Зафіксуємо $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in [x_n]$. Для $\varepsilon = 1$ згідно з умовою (ii) теореми 3.30 виберемо скінченну підмножину $I_0 \subset \mathbb{N}$ так, щоби $\big\|\sum\limits_{n\in J} a_n x_n\big\| < 1$ для довільної скінченної множини $J \subset \mathbb{N} \setminus I_0$. Тоді для будь-якої множини $I \subseteq \mathbb{N}$ отримаємо
$$\Big\|\sum_{i\in I} a_i x_i\Big\| \le \Big\|\sum_{i\in I\cap I_0} a_i x_i\Big\| + \Big\|\sum_{i\in I\setminus I_0} a_i x_i\Big\| \le$$
$$\max_{I_1\subseteq I_0}\Big\|\sum_{i\in I_1} a_i x_i\Big\| + \lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{i\in (I\setminus I_0)\cap\{1,\dots,n\}} a_i x_i\Big\| \le \max_{I_1\subseteq I_0}\Big\|\sum_{i\in I_1} a_i x_i\Big\| + 1.$$
Отже, для кожного $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in [x_n]$ множина $\Big\{\big\|\sum\limits_{i\in I} a_i x_i\big\| : \; I \subseteq \mathbb{N}\Big\}$ є обмеженою. Згідно з теоремою Банаха-Штейнгауза, $\sup\limits_{I\subseteq\mathbb{N}} \|P_I\| < \infty$.

Доведення решти нерівностей в умові (iii) ми залишаємо читачеві (див. доведення еквівалентності умов (iii) та (iv) у теоремі 3.30). $\square$

Означення 3.34. *Число* $\sup\limits_{\Theta}\|M_\Theta\|$ *(див. твердження 3.33) називається безумовною базисною константою безумовного базису (безумовної базисної послідовності)* (x_n).

Цікаве спостереження: від послідовності, для якої оператор M_Θ є обмеженим, не обов'язково вимагати базисності, для того, щоби вона була безумовною. Точніше, має місце наступний критерій безумовної базисності послідовності.

Теорема 3.35. *Для того, щоби послідовність* (x_k) *ненульових елементів банахового простору* X *була безумовною базисною, необхідно і достатньо існування константи* $M \in [1, +\infty)$ *такої, що для довільного* $n \in \mathbb{N}$, *довільних скалярів* $(a_k)_1^n$ *і довільних знаків* $\theta_k = \pm 1,\ k = 1, \ldots, n$ *виконувалася нерівність*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} \theta_k a_k x_k\Big\| \le M \,\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big\|. \tag{3.4}$$

Крім того, у цьому випадку найменше число M, *для якого виконується нерівність (3.4) при всіх значеннях* n, *скалярів і знаків, дорівнює безумовній константі послідовності* (x_k).

Доведення. Необхідність випливає з твердження 3.33. З цього ж твердження випливає останнє твердження теореми, оскільки норма оператора M_Θ дорівнює нормі цього ж оператора, звуженого на щільний в $[x_k]$ підпростір всіх скінченних лінійних комбінацій системи (x_k), який, згідно з означенням, збігається з найменшою константою M, для якої виконується (3.4).

Доведемо достатність. З еквівалентності умов (i) і (iv) наслідку 3.32 випливає, що досить довести базисність послідовності (x_k). Зауважимо спочатку, що для довільних векторів x, y нормованого простору X знайдеться знак $\theta \in \{-1, 1\}$, для якого $\|x\| \le \|x + \theta y\|$. Дійсно, якби це було не так, то

$$\|x + y\| + \|x - y\| < 2\|x\| = \|(x + y) + (x - y)\| \le \|x + y\| + \|x - y\|,$$

– суперечність. Доведемо виконання умов критерію базисності послідовності (наслідок 3.7). Умова (i) нам дана. Доведемо умову (ii)

з константою $K = M$. Нехай $n < m$ – довільні натуральні числа і $(a_k)_1^m$ – довільні скаляри. Для $x = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ і $y = \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k x_k$ виберемо $\theta \in \{-1, 1\}$так, щоб $\|x\| \leq \|x + \theta y\|$. Тоді, враховуючи (3.4), одержимо

$$\|x\| \leq \|x + \theta y\| \leq M\|x + y\|,$$

отже, умову (ii) доведено. $\square$

Задача 25. *Довести, що стандартні базиси просторів c_0 та ℓ_p при $1 \leq p < \infty$ є безумовними з безумовною константою* 1.

Задача 26. *Довести, що блок-базис довільної безумовної базисної послідовності є безумовною базисною послідовністю з безумовною константою, що не перевищує безумовної базисної константи вихідної послідовності.*

Цікаво зазначити, що система Гаара (див. задачу 17) є безумовним базисом у просторах L_p при $1 < p < \infty$ і не є безумовним базисом в L_1. Цей факт є тривіальним лише при $p = 2$. При довільному $1 < p < \infty$ безумовність системи Гаара доводиться складно, див., наприклад, [36] (повне доведення з усіма допоміжними фактами зайняло би, принаймні, 6 лекцій). Умовність системи Гаара в L_1 пояснюється трохи простіше (акуратне доведення займало більше 1 лекції, коли автор спецкурсу брався це пояснювати; хоча ідея цього доведення не складна, див. [36]). В просторах L_1 і $C[a, b]$ безумовного базису взагалі не існує. Більш того, ці простори не можна ізоморфно вкласти у деякий банахів простір з безумовним базисом [36].

4. Деякі властивості класичних банахових просторів

Найпростіші за своєю структурою банахові простори – простори c_0 і ℓ_p при $1 \le p < \infty$, – досить повно вивчені і мають гарні властивості. Деякі з основних властивостей ми наведемо з доведенням, а про деякі – лише згадаємо. Далі ми обговоримо основну структурну гіпотезу про існування у кожному нескінченновимірному банаховому просторі підпростору, який є ізоморфним до c_0 або до ℓ_p при деякому $1 \le p < \infty$. Ми наведемо конструкцію класичного простору Цирельсона з доведенням того, що цей простір є контрприкладом до основної структурної гіпотези. На завершення ми познайомимося з чудовою властивістю системи Радемахера у просторах L_p – нерівністю Хінчина.

4.1. **Підпростори просторів c_0 і ℓ_p при $1 \le p < \infty$.** Основна причина багатьох властивостей цих просторів дуже проста. Ми її сформулюємо у вигляді наступної задачі.

Задача 27. *Нехай $E = c_0$ або $E = \ell_p$ при деякому $1 \le p < \infty$. Довести, що довільний нормований блок-базис стандартного базису (e_n) простору E є 1-еквівалентним до (e_n).*

З результату задачі 27 і теореми Бесаґи-Пелчиньського 3.16 безпосередньо випливає таке твердження.

Твердження 4.1. *Нехай $E = c_0$ або $E = \ell_p$ при деякому $1 \le p < \infty$. Довільний нескінченновимірний підпростір $X \subseteq E$ для довільного $\varepsilon > 0$ містить підпростір $Y \subseteq X$, який є $(1+\varepsilon)$-ізоморфним до E.*

Наступне твердження носить допоміжний характер для побудови простору Цирельсона.

Твердження 4.2. *Нехай банахів простір X з базисом (x_n) містить послідовність (y_n), яка є λ-еквівалентною до стандартного базису (e_n) простору $E = c_0$ або $E = \ell_p$ при деякому $1 \le p < \infty$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує нормований блок-базис (u_n) базису (x_n), який є $(\lambda+\varepsilon)$-еквівалентним до (e_n).*

Зауважимо, що доведення у випадку просторів c_0 і ℓ_p при $1 < p < \infty$ значно простіше: можна скористатися тим фактом, що послідовність (e_n) слабко прямує до нуля, який не має місця для простору ℓ_1.

Доведення. Нехай $T : E \to X$ – ізоморфне вкладення, для якого $Te_n = y_n$ і $\|T\|\|T^{-1}\| \le \lambda$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Виберемо $\delta \in (0, 1/2)$ так, щоби

$$\frac{1+2d}{1-2d} < 1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

при $d \le \delta$. Побудуємо блок-базис (u_n) базису (x_n) і блок-базис (v_n) базису (y_n). Позначимо через (P_n) базисні проектори базису (x_n). Виберемо n_1 так, щоби

$$\Big\| \sum_{k>n_1} x_k^*(y_1)\, x_k \Big\| < \frac{\delta}{2} \qquad \text{і задамо} \qquad u_1 = P_{n_1} y_1 = \sum_{k=1}^{n_1} x_k^*(y_1)\, x_k$$

та $v_1 = y_1$. Зауважимо, що $\|u_1 - v_1\| < \delta/2$. Позначимо для зручності $\alpha = \|e_1 + e_2\|$. Оскільки P_{n_1} – компактний оператор, то існують два індекси $i_1 < j_1$, такі, що

$$\big\| P_{n_1} \big(y_{i_1} - y_{j_1} \big) \big\| < \frac{\delta\, \alpha}{8}\,.$$

Виберемо $n_2 > n_1$ так, щоби

$$\big\| \sum_{k>n_2} x_k^*(y_{i_1} - y_{j_1})\, x_k \big\| < \frac{\delta\, \alpha}{8}\,.$$

і задамо

$$u_2 = \alpha^{-1} \big(P_{n_2} - P_{n_1} \big)(y_{i_1} - y_{j_1}) = \alpha^{-1} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} x_k^*(y_{i_1} - y_{j_1})\, x_k$$

та $v_2 = \alpha^{-1}(y_{i_1} - y_{j_1})$. Тоді

$$\|u_2 - v_2\| \le \Big\| \alpha^{-1} \sum_{k=1}^{n_1} x_k^*(y_{i_1} - y_{j_1})\, x_k \Big\| + \Big\| \alpha^{-1} \sum_{k>n_2} x_k^*(y_{i_1} - y_{j_1})\, x_k \Big\| < \frac{\delta}{4}\,.$$

Продовжуючи процедуру побудови очевидним чином (далі будемо вибирати індекси $j_1 < i_2 < j_2$), побудуємо блок-базис (u_n) базису (x_n) і блок-базис (v_n) базису (y_n), причому $\|u_n - v_n\| < 2^{-n}\delta$. Оскільки $(T^{-1}v_n)$ – нормований блок-базис базису (e_n), то згідно з результатом задачі 27, він є 1-еквівалентним до (e_n). Отже, послідовність (v_n) є λ-еквівалентною до (e_n). Далі, оскільки $d = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n - v_n\| < \delta$, то

$$\frac{1+2d}{1-2d} < 1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}, \tag{4.1}$$

згідно з вибором δ. Враховуючи, що $\delta < 1/2$ а також оцінку (4.1), з теореми 3.13 Крейна-Мільмана-Рутмана одержуємо, що послідовність (u_n) є $(1 + \varepsilon/\lambda)$-еквівалентною до (v_n). Отже, (u_n) є $(\lambda + \varepsilon)$-еквівалентною до (e_n). $\square$

Наступну властивість мають лише простори c_0 і ℓ_1.

Теорема 4.3 (Теорема Джеймса)**.** *Нехай X - банахів простір, ізоморфний до $E = c_0$ або $E = \ell_1$. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує підпростір $X_0 \subseteq X$, $(1+\varepsilon)$-ізоморфний до E.*

Введемо наступне позначення. Для скінченних підмножин натурального ряду E, F запис $E < F$ означає, що хоча б одна з множин E, F порожня, або $\max E < \min F$.

Доведення. Ми доведемо частину, яка стосується простору ℓ_1. Достатньо довести, що якщо $|||\cdot|||$ – еквівалентна норма на ℓ_1 і (e_i) – стандартний базис простору ℓ_1, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує $|||\cdot|||$-нормований блок-базис (x_i) базису (e_i), такий, що

$$\Big|\Big|\Big| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big|\Big|\Big| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

для довільного скінченного набору скалярів (a_i). Дійсно, якщо $S : X \to \ell_1$ – ізоморфізм, то за еквівалентну норму на ℓ_1 розглянемо $|||x||| = \|S^{-1}x\|$. Тоді $X_0 = [S^{-1}x_n]$ є шуканим підпростором, тому що оператор $T : \ell_1 \to X_0$, який задається за допомогою формули

$$T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n S^{-1} x_n$$

буде ізоморфізмом, причому $\|T\| = 1$ і $\|T^{-1}\| \le 1+\varepsilon$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ задамо

$$c_n = \inf\left\{ \frac{|||\sum_{i=n}^m a_i e_i|||}{\sum_{i=n}^m |a_i|} : \ m \ge n, \ \sum_{i=n}^m |a_i| > 0 \right\}.$$

Оскільки норми еквівалентні, то $0 < C_1 \le c_n \le c_{n+1} \le C_2 < \infty$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, а отже, $c_n \uparrow c$ для деякого $c \in (0, +\infty)$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Виберемо спочатку $\delta > 0$ так, щоби

$$\frac{c}{c+\delta} > \frac{1}{1+\varepsilon},$$

а потім $n_0 \in \mathbb{N}$ так, щоби

$$\frac{c_{n_0}}{c+\delta} > \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Тепер для кожного $i \in \mathbb{N}$ виберемо $x_i = \sum\limits_{j \in E_i} b_j e_j$ так, щоби

$$|||x_i||| = 1, \ \sum_{j \in E_i} |b_j| > \frac{1}{c+\delta}, \ \{n_0\} \le E_1 < E_2 < \ldots.$$

Отже, згідно з означенням числа c_{n_0}, для довільного скінченного набору скалярів $(a_i)_1^n$ маємо

$$\Big|\Big|\Big| \sum_{i=1}^n a_i x_i \Big|\Big|\Big| = \Big|\Big|\Big| \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j \in E_i} b_j e_j \Big|\Big|\Big| \ge c_{n_0} \sum_{i=1}^n |a_i| \sum_{j \in E_i} |b_j| \ge$$

$$\frac{c_{n_0}}{c+\delta} \sum_{i=1}^n |a_i| \ge \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad \square$$

Зауважимо, що для довільного $1 < p < \infty$ можна довести будь-яку «половину» теореми Джеймса для простору ℓ_p, тобто будь-яку з двох нерівностей, які у сукупності дають теорему Джеймса. Простори ℓ_1 і c_0 є крайніми у тому розумінні, що для них потрібна лише одна з двох нерівностей, а друга виконується автоматично.

4.2. **Простір Цирельсона.** Простір Цирельсона T був першим прикладом банахового простору, що не містить ℓ_p та c_0 ізоморфно. Простір T задається так (насправді, цей опис, який належить Фігелю і Джонсону [23], є описом спряженого до побудованого в [10] простору).

Нехай (t_n) - стандартний базис простору c_{00} (через c_{00} позначається лінійний підпростір c_0 фінітних послідовностей). Для $x, y \in c_{00}$ відношення $x < y$ означає, що $\operatorname{supp} x < \operatorname{supp} y$. Скінченну послідовність $(E_i)_1^n$ скінченних підмножин $\mathbb{N}$ називається *допустимою*, якщо $\{n\} < E_1 < \cdots < E_n$. Сукупність всіх допустимих скінченних послідовностей скінченних підмножин $\mathbb{N}$ позначатимемо через $\mathcal{D}$.

Для $E \subseteq \mathbb{N}$ та $x \in c_{00}$ задамо $Ex(i) = 0$, якщо $i \notin E$ та $Ex(i) = x(i)$ при $i \in E$. Побудова простору T полягає у доведенні існування норми на c_{00} з певними властивостями; простір T стає поповненням c_{00} по цій нормі.

Норма $\|\cdot\|$ на c_{00} називається *безумовно монотонною*, якщо $\|Ex\| \leq \|x\|$ для довільних $E \subseteq \mathbb{N}$ і $x \in c_{00}$.

Лема 4.4. *Існує безумовно монотонна норма $\|\cdot\|$ на c_{00} з властивостями*

$$\|x\| = \max\left\{\|x\|_{c_0},\ \max\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\|E_i x\| :\ (E_i)_1^k \in \mathcal{D}\right\}\right\} \tag{4.2}$$

і

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m}\theta_k a_k t_k\Big\| = \Big\|\sum_{k=1}^{m} a_k t_k\Big\| \tag{4.3}$$

для довільного набору $(\theta_k)_1^n$ знаків ± 1.

Доведення. Визначимо рекурсивно послідовність норм:

$$\|x\|_0 = \|x\|_{c_0},$$

$$\|x\|_{n+1} = \max\left\{\|x\|_n,\ \max\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\|E_i x\|_n :\ (E_i)_1^k \in \mathcal{D}\right\}\right\}. \tag{4.4}$$

Означення числа $\|x\|_{n+1}$ є коректним, тому що максимум розглядається скінченної множини. Перевірка того, що задана величина є нормою, залишається читачеві. Індукцією за n неважко довести, що $(\|\cdot\|_n)$ є зростаючою послідовністю безумовно монотонних норм, яка обмежена зверху нормою $\|\cdot\|_{\ell_1}$. Переходом до границі у нерівності, одержуємо безумовну монотонність норми $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x\|_n$. Залишається довести рівність (4.2) для довільного фіксованого $x \in c_{00}$. З (4.4) випливає нерівність

$$\max\Big\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \|E_i x\|_n : \ (E_i)_1^k \in \mathcal{D} \Big\} \le \|x\|_{n+1},$$

звідки при $n \to \infty$ одержуємо

$$\max\Big\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \|E_i x\| : \ (E_i)_1^k \in \mathcal{D} \Big\} \le \|x\|. \tag{4.5}$$

Оскільки $\|x\| \ge \|x\|_n \ge \|x\|_{c_0}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $\|x\| \ge \|x\|_{c_0}$. Якщо $\|x\| = \|x\|_{c_0}$, то (4.2) випливає з (4.5).

Нехай тепер $\|x\| > \|x\|_{c_0}$. Тоді існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такий, що $\|x\|_n > \|x\|_{c_0}$ для всіх $n \ge n_0$, а отже,

$$\|x\|_n = \max\Big\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \|E_i x\|_{n-1} : \ (E_i)_1^k \in \mathcal{D} \Big\}$$

при $n \ge n_0$. Перейшовши в останній рівності до границі при $n \to \infty$, одержимо

$$\|x\| = \max\Big\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \|E_i x\| : \ (E_i)_1^k \in \mathcal{D} \Big\},$$

а отже (4.2) виконується, згідно з припущенням $\|x\| > \|x\|_{c_0}$.

Доведемо умову (4.3). Нехай $m \in \mathbb{N}$, $(a_k)_1^m$ – довільні скаляри і $\theta_k = \pm 1$, $k = 1, \ldots, m$ – довільні знаки. Індукцією за n доведемо, що для довільного $n = 0, 1, \ldots$ має місце рівність

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m} \theta_k a_k t_k\Big\|_n = \Big\|\sum_{k=1}^{m} a_k t_k\Big\|_n. \tag{4.6}$$

При $n = 0$ маємо відому властивість стандартного базису простору c_0, а індуктивний перехід легко випливає з (4.4). Нарешті, переходячи до границі при $n \to \infty$ у рівності (4.6), одержимо (4.3). $\square$

Позначимо через T поповнення c_{00} відносно $\|\cdot\|$. З леми 4.4 і теореми 3.35 випливає такий факт.

Твердження 4.5. *Стандартний базис* (t_n) *простору* c_{00} *є безумовним базисом простору* T *з безумовною константою* 1.

Лема 4.6. *Кожний нормований блок-базис* (u_n) *стандартного базису* (t_n) *простору* T *для кожного* $m \in \mathbb{N}$ *містить підпослідовність довжини* m*, яка є* 2*-еквівалентною до стандартного базису простору* ℓ_1^m.

Доведення. Виберемо n_0 так, щоби $\operatorname{supp} u_{n_0+1} \subseteq \{m+1, m+2, \ldots\}$. Тоді послідовність множин $\tilde{E}_i = \operatorname{supp} u_{n_0+i}$, $i = 1, \ldots, m$ є допустимою. Тому, згідно з властивістю норми в T, будемо мати:

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i u_{n_0+i} \Big\| \geq$$

$$\geq \max \Big\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \Big\| E_j \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i u_{n_0+i} \Big) \Big\| : \ (E_j)_1^k \in \mathcal{D} \Big\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \Big\| \tilde{E}_j \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i u_{n_0+i} \Big) \Big\| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} |a_i|,$$

тобто $(u_i)_{i=n_0+1}^{n_0+m}$ є 2-еквівалентною до стандартного базису простору ℓ_1^m. □

Лема 4.7. T *не містить підпросторів, ізоморфних до* c_0 *або* ℓ_p *при* $1 < p < \infty$.

Доведення. Нехай $X \subseteq T$ – довільний нескінченновимірний підпростір. Припустимо, що X ізоморфний до c_0 або ℓ_p при деякому $1 < p < \infty$. Згідно з твердженням 4.2, існує нормований блок-базис (u_n) базису (t_n), еквівалентний до стандартного базису відповідного простору c_0 або ℓ_p. Але це суперечить лемі 4.6. Дійсно, нехай λ – константа еквівалентності базисів. Тоді для довільного $m \in \mathbb{N}$ і довільної підпослідовності $(u_{n_i})_{i=1}^m$ будемо мати (див. результат задачі 27)

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} 1 \leq \Big\| \sum_{i=1}^{m} u_{n_i} \Big\| \leq \lambda \Big(\sum_{i=1}^{m} 1 \Big)^{\frac{1}{p}} = \lambda \, m^{\frac{1}{p}}$$

для випадку $X \sim \ell_p$ при $1 < p < \infty$, звідки $m^{1-\frac{1}{p}} \leq 2\lambda$ – суперечність, завдяки довільності m. Аналогічно для випадку $X \sim c_0$ отримаємо

$$\frac{m}{2} \leq \Big\|\sum_{i=1}^{m} u_{n_i}\Big\| \leq \lambda \max_{1\leq i\leq m} |1| = \lambda,$$

– суперечність. $\square$

Для доведення того, що T не містить підпросторів, ізоморфних ℓ_1, потрібна наступна лема.

Лема 4.8. *Для довільного натурального числа k і довільних векторів $(x_i)_0^{2k}$ з $T \cap c_{00}$ таких, що*

$$\operatorname{supp} x_0 \subseteq \{1,\ldots,k\} < \operatorname{supp} x_1 < \ldots < \operatorname{supp} x_{2k},$$

виконується нерівність

$$\Big\|x_0 + \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k} x_i\Big\| \leq \frac{7}{4} \max_{0\leq i\leq 2k} \|x_i\|.$$

Доведення. Зауважимо, що якщо для $x, y \in C_{00}$ має місце $\operatorname{supp} x \cap \operatorname{supp} y = \emptyset$, то

$$\|x+y\|_{c_0} = \max\big\{\|x\|_{c_0}, \|y\|_{c_0}\big\}.$$

Отже, оскільки $\operatorname{supp} x_0 \cap \operatorname{supp}\left(\frac{1}{2k}\sum\limits_{i=1}^{2k} x_i\right) = \emptyset$, то

$$\Big\|x_0 + \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k} x_i\Big\|_{c_0} = \max\Big\{\|x_0\|_{c_0}, \Big\|\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k} x_i\Big\|_{c_0}\Big\} \leq \max_{0\leq i\leq 2k} \|x_i\|,$$

то, згідно з лемою 4.4, достатньо довести, що для довільної допустимої послідовності $(E_j)_1^n$ підмножин $\mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{n}\Big\|E_j\big(x_0 + \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k} x_i\big)\Big\| \leq \frac{7}{2} \max_{0\leq i\leq 2k} \|x_i\|. \tag{4.7}$$

Припустимо спочатку, що $n \geq k$. Тоді $E_j x_0 = 0$ для всіх $1 \leq j \leq n$ за рахунок допустимості (E_j), а отже,

$$\sum_{j=1}^{n}\Big\|E_j\big(x_0 + \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k} x_i\big)\Big\| = \frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{n}\Big\|E_j\sum_{i=1}^{2k} x_i\Big\| \leq$$

$$\leq \frac{2}{2k}\Big\|\sum_{i=1}^{2k} x_i\Big\| \leq \frac{2}{2k}\sum_{i=1}^{2k}\|x_i\| \leq 2\max_{0\leq i\leq 2k}\|x_i\|.$$

Нехай тепер $n < k$. Покладемо

$$A = \Big\{ i \in \{1,\dots,m\}: \quad E_j x_i \neq 0 \text{ для, принаймні, } 2 \text{ значень } j \in \{1,\dots,n\} \Big\},$$

$$B = \Big\{ i \in \{1,\dots,m\}: \quad E_j x_i \neq 0 \text{ для, максимум, } 1 \text{ значення } \in \{1,\dots,n\} \Big\}.$$

Доведемо, що $|A| \leq n$. Для кожного $i \in A$ задамо

$$\varphi(i) = \min\{j: \quad E_j x_i \neq 0\}.$$

Згідно з означенням множини A, якщо $i_1, i_2 \in A$, причому $i_1 < i_2$, то $\operatorname{supp} x_{i_1} < \operatorname{supp} x_{i_2}$, а отже, $\varphi(i_1) < \varphi(i_2)$. Оскільки функція $\varphi : A \to \{1,\dots,n\}$ є ін'єктивною, то $|A| \leq n$.

Отже,

$$\sum_{j=1}^{n}\Big\|E_j\big(x_0 + \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k} x_i\big)\Big\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\|E_j x_0\| + \frac{1}{2k}\Big(\sum_{i\in A}\sum_{j=1}^{n}\|E_j x_i\| + \sum_{i\in B}\sum_{j=1}^{n}\|E_j x_i\|\Big)$$

$$\leq 2\|x_0\| + \frac{1}{2k}\Big(2\sum_{i\in A}\|x_i\| + \sum_{i\in B}\|x_i\|\Big) = 2\|x_0\| + \frac{1}{2k}\Big(\sum_{i\in A}\|x_i\| + \sum_{i=1}^{2k}\|x_i\|\Big)$$

$$\leq 2\|x_0\| + \frac{1}{2k}\big(n-1+2k\big)\max_{1\leq i\leq 2k}\|x_i\| \leq 2\|x_0\| + \frac{1}{2k}\big(k-2+2k\big)\max_{1\leq i\leq 2k}\|x_i\|$$

$$= 2\|x_0\| + \Big(\frac{2k-2}{2k} + \frac{k}{2k}\Big)\max_{1\leq i\leq 2k}\|x_i\| \leq \Big(3 + \frac{1}{2}\Big)\max_{0\leq i\leq 2k}\|x_i\|,$$

отже, (4.7) доведено. □

Лема 4.9. *Простір T не містить підпросторів, ізоморфних ℓ_1.*

Доведення. Нехай $X \subseteq T$ – підпростір, ізоморфний ℓ_1. Згідно з теоремою Джеймса, існує нормована послідовність (x_i) в X, яка є 17/16-еквівалентною до стандартного базису простору ℓ_1. Згідно з твердженням 4.2, існує нормований блок-базис (u_i) базису (t_n), який є 9/8–еквівалентним до стандартного базису простору ℓ_1. Виберемо k настільки великим, щоби $\operatorname{supp} u_1 \subseteq \{1, \ldots, k\}$. Згідно з лемою 4.8,

$$\Big\|u_1 + \frac{1}{2k}\sum_{i=2}^{2k+1} u_i\Big\| \le \frac{7}{4},$$

в той час, як

$$\Big\|u_1 + \frac{1}{2k}\sum_{i=2}^{2k+1} u_i\Big\| \ge \frac{8}{9}\big(1+1\big) = \frac{16}{9} > \frac{7}{4},$$

– суперечність. □

4.3. **Система Радемахера і нерівність Хінчина.** Розглянемо наступну класичну систему функцій на $[0,1]$, яка називається системою Радемахера: $r_n(t) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi t$, $\ n = 1, 2, \ldots$.

Задача 28. *Довести, що система Радемахера є послідовністю незалежних однаково розподілених випадкових величин з нульовим середнім.*

Задача 29. *Довести, що (r_n) слабко прямує до нуля у просторах L_p при $1 \le p < \infty$ і не прямує слабко до нуля в L_∞.*

Задача 30. *Довести, що система Радемахера є повною у ймовірнісному розумінні (тобто мінімальна σ-алгебра Σ підмножин відрізка $[0,1]$, відносно якої всі функції r_n вимірні, збігається з борелівською σ-алгеброю), але не є повною у розумінні аналізу (тобто замикання лінійної оболонки $R = [r_n]_{n=1}^\infty$ у просторі L_p не дорівнює усьому L_p при довільному $1 \le p \le \infty$).*

Задача 31. *Довести, що для довільних натуральних чисел $m \ge 1 \le n_1 < \ldots < n_m$ і цілих чисел $k_1, \ldots, k_m$*

$$\int_{[0,1]} r_{n_1}^{k_1} \ldots r_{n_m}^{k_m} d\mu = 0,$$

окрім випадку, коли всі числа $k_1, \ldots, k_m$ парні. В цьому випадку інтеграл дорівнює 1.

Добре відома тотожність Парсеваля, яку можна розглядати як узагальнення теореми Піфагора на нескінченновимірний евклідів простір, стверджує, що квадрат норми елемента в евклідовому просторі дорівнює сумі квадратів коефіцієнтів Фур'є цього елемента відносно будь-якого фіксованого ортонормованого базису. Приблизно те ж саме відбувається у підпросторі R простору L_p, який є замиканням лінійної оболонки системи Радемахера відносно норми простору L_p.

Теорема 4.10. *Для довільного* $p \in [1, \infty)$ *існують константи* $A_p, B_p > 0$*, такі, що для довільного скінченного набору комплексних скалярів* $(a_n)_{n=1}^m$ *мають місце нерівності*

$$A_p\Big(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\int_{[0,1]}\Big|\sum_{n=1}^m a_n r_n\Big|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq B_p\Big(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Оскільки (r_n) є ортонормованою системою в гільбертовому просторі L_2, то нерівність Хінчина має місце при $p = 2$ з константами $A_2 = B_2 = 1$. Крім того, з нерівності Гельдера випливає відома оцінка $\|x\|_{L_r} \leq \|x\|_{L_s}$ при довільних $1 \leq r \leq s < \infty$ і $x \in L_s$. Отже, при $p > 2$ має місце ліва частина нерівності з $A_p = 1$, а при $1 \leq p < 2$ – права частина з $B_p = 1$. З оцінки для різних норм також випливає, що достатньо довести праву нерівність з деяким B_p лише для парних значень p і ліву нерівність при $p = 1$ при деякому A_1. Розглянувши окремо дійсну і уявну частини скалярів a_n, ми зведемо загальний випадок до випадку дійсних скалярів.

Зауважимо, що для довільних натуральних чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_s$ і цілих чисел $k_i \geq 0$ маємо

$$\int_{[0,1]} r_{n_1}^{k_1} r_{n_2}^{k_2} \ldots r_{n_s}^{k_s} d\mu = 0$$

за винятком випадків, коли всі числа k_i парні, причому в цих випадках інтеграл дорівнює 1. Тому безпосереднє обчислення показує, що

$$\int_{[0,1]}\Big(\sum_{n=1}^m a_n r_n\Big)^{2k} d\mu =$$

$$= \sum_{1 \leq s \leq k} \ \sum_{1 \leq n_1 < \ldots < n_s \leq m} \ \sum_{k_1 + \ldots + k_s = k} \gamma(2k_1, \ldots, 2k_s)\, a_{n_1}^{2k_1} \ldots a_{n_s}^{2k_s},$$

де

$$\gamma(i_1, \ldots, i_\ell) = \frac{(i_1 + \ldots + i_\ell)!}{(i_1)! \cdot \ldots \cdot (i_\ell)!}$$

для довільних невід'ємних цілих чисел $i_1, \ldots, i_\ell$. Зауважимо, що

$$\Big(\sum_{n=1}^m a_n^2\Big)^k = \sum_{1\le s\le k} \ \sum_{1\le n_1<\ldots<n_s\le m} \ \sum_{k_1+\ldots+k_s=k} \gamma(k_1,\ldots,k_s)\, a_{n_1}^{2k_1}\ldots a_{n_s}^{2k_s}\,.$$

Тому, визначивши

$$B_{2k} = \Big(\max\Big\{\frac{\gamma(2k_1,\ldots,2k_s)}{\gamma(k_1,\ldots,k_s)} \ : \ 1\le s\le k, \ \ k_1+\ldots+k_s=k\Big\}\Big)^{\frac{1}{2k}},$$

одержимо

$$\int_{[0,1]}\Big(\sum_{n=1}^m a_n r_n\Big)^{2k} d\mu \le B_{2k}^{2k}\Big(\sum_{n=1}^m a_n^2\Big)^k.$$

Крім того, оскільки

$$\frac{\gamma(2k_1,\ldots,2k_s)}{\gamma(k_1,\ldots,k_s)} \ \le \ \frac{(2k)!}{k!2^k} \ = \ \frac{(k+1)\cdot\ \ldots\ \cdot(2k)}{2^k} \ \le k^k\,,$$

то $B_{2k}\le\sqrt{k}$.

Залишається знайти A_1 і довести відповідну ліву частину нерівності. Покладемо $f=\sum\limits_{n=1}^m a_n r_n$. Згідно з нерівністю Гельдера маємо

$$\int_{[0,1]}|f|^2 d\mu = \int_{[0,1]}|f|^{\frac{2}{3}}|f|^{\frac{4}{3}}d\mu \le \Big(\int_{[0,1]}|f|d\mu\Big)^{\frac{2}{3}}\Big(\int_{[0,1]}|f|^4 d\mu\Big)^{\frac{1}{3}} \le$$

$$\le \Big(\int_{[0,1]}|f|d\mu\Big)^{\frac{2}{3}} B_4^{\frac{4}{3}}\Big(\int_{[0,1]}|f|^2 d\mu\Big)^{\frac{2}{3}}.$$

Звідси випливає потрібна нерівність з константою $A_1 = B_4^{-2}$. $\square$

З нерівності Хінчина випливає, що підпростір R простору L_p, як множина, не залежить від p.

Наслідок 4.11. *Для довільного $p\in[1,\infty)$ підпростір R простору L_p, який є замиканням лінійної оболонки системи Радемахера, $A_p^{-1}B_p$-ізоморфний до ℓ_2.*

Список літератури

1. Банах С. С. *Курс функціонального аналізу.* – 1948. – Радянська школа. – Київ. 216 с.
2. Дистель Д. *Геометрия банаховых пространств.* – Вища школа. – Киев. – 1980. – 215 с.
3. Дэй М. М. *Нормированные линейные пространства.* Москва. – Изд-во ин. лит. – 1961. – 232 с.
4. Кадец В. М. *Курс функционального анализа.* – Харьков. – ХНУ. – 2006. – 607 с.
5. Кадец М. И., Митягин Б. С. *Дополняемые подпространства в банаховых пространствах* // Успехи мат. наук. – 1973. – 28, №6. – С. 77–94.
6. Маслюченко В. К. *Лекції з функціонального аналізу (у 3-х частинах).* – Чернівці. – Рута. – 2010-2011. – 132 с.
7. Попов М. М. *Доповнювальні підпростори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха* // Математика сьогодні. - 2007. - 13. - С. 78–116.
8. Рудин У. *Функциональный анализ.* – Москва: Мир, 1975. – 443 с.
9. Халмош П. *Гильбертово пространство в задачах.* – Москва: Мир, 1970. – 352 с.
10. Цирельсон Б. С. *Не каждое банахово пространство содержит ℓ_p или c_0* // Функц. анализ и его прилож. – 1974. – 8. – С. 138–141.
11. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* – Москва: Мир, 1969. – 1071 с.
12. Albiac F., Kalton N. J. *Topics in Banach space theory.* – Graduate texts in Mathematics. – 233. – Springer. – New York. – 2006. XI, 373 p.
13. Banach S., Mazur S. *Zur theorie der linearen dimension* // Stud. Math. – 1933. – 4. – P. 100–112.
14. Bennet B., Dor L. E., Goodman V., Johnson W. B., Newman C. *On uncomplemented subspaces of L_p, $1 < p < 2$* // Isr. J. Math. – 1977. – 26, N2. – P. 178–187.
15. Bourgain J. *A counterexample to a complementation problem* // Compos. Math. – 1981. – 43, N1. – P. 133-144.
16. Casazza P. G. *Approximation properties* // Handbook of the geometry of Banach spaces. Vol.I. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss eds. – Amsterdam: Elsevier. – 2001. – P. 271–316.
17. Diestel J. *Sequences and series in Banach spaces.*– Springer-Verlag. – New York etc. – 1984. XII, 261 p.
18. Diestel J., Jarchow H., Tonge A. *Absolutely summing operators.* – Cambridge Univ. Press. – New York. – 1995. – XV, 474 p.
19. Diestel J., Uhl J. J. *Vector measures.* – Math. Surveys, N 15. – Providence, RI: Amer. Math. Soc. – 1977. – XIII, 322 p.
20. Dvoretzky A. *A theorem on convex bodies and applications to Banach spaces* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1959. – 45. – P. 223–226.
21. Enflo P. *A counterexample to the approximation property in Banach spaces* // Acta Math. – 1973. – 130. – P. 309–317.
22. Fichtenholz G., Kantorovich L. *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées* // Stud. Math. – 1979. – 65, №2. – P. 203–225.
23. Figiel T., Johnson W. B. *A uniformly convex Banach space which contains no ℓ_p* // Compos. Math. – 1974. – 29, N2. – P. 179-190.
24. Giannopoulos A. A., Milman V. Euclidean structure of finite dimensional normed spaces // Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 1, Ch. 17, Eds. W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, Elsevier. 2001, P. 707–779.

25. Gordon Y. *Gaussian processes and almost spherical subsections of convex bodies* // Ann. Probab. – 1988. – 16. – P. 180–188.
26. Gowers W. T., Maurey B. *The unconditional basic sequence problem* // J. Amer. Math. Soc. – 1993. – 6. – P. 851–874.
27. Grothendieck A. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* // Bol. Soc. Mat. São Paulo – 1956. – 8. – P. 1–79.
28. Eds. Johnson W. B., Lindenstrauss J. *Handbook of the geometry of Banach spaces. Vol.I.* – Amsterdam: Elsevier, 2001. – X, 1005 p.
29. Eds. Johnson W. B., Lindenstrauss J. *Handbook of the geometry of Banach spaces. Vol.II.* – Amsterdam: Elsevier, 2003. – IX, 861 p.
30. Johnson W. B., Odell E. *Subspaces of L_p which embed into ℓ_p* // Compos. Math. – 1974. – 28, N1. – P. 37–49.
31. Kadec M. I., Pełczyński A. *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p* // Stud. Math. – 1962. – 21, N2. – P. 161-176.
32. Levy P. *Théorie de l'addition de variable aleatiorés.* – Cauthier-Villars. – Paris. – 1937. – 234 p.
33. Lindenstrauss J., Pełczyński A. *Contributions to the theory of classical Banach spaces* // J. Funct. Anal. – 1971. – 8, N2. – P. 225–249.
34. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *On the complemented subspaces problem* // Isr. J. Math. – 1971. – 9. – P. 263–269.
35. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces. I.* – Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1977. – XIII, 188 p.
36. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces. II.* – Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1979. – X, 243 p.
37. Matsak I., Plichko A. *Dvoretzky's theorem by Gaussian method* // Anal. and Appl. Proc. Intern. Conf. Dedic. to 110th Annivers. of S. Banach. May 28-31, 2002, Lviv. Ukraine. Ed. V. Kadets and W. Zelazko. Elsevier, North Holland Math. Studies. – 2004. – 197. – P. 171–184.
38. (Ed. by Mauldin R. D.) *The Scottish Book.* – Boston: Birkhäuser, 1981. – 268 p.
39. Maurey B. *Sous-espaces compléméntes de L^p d'apres P. Enflo* // Semin. Maurey-Schwartz. – 1975. – Exp. No III (1974-75). – P. 1–14.
40. Milman V. D., Schechtman G. *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces.* – Lect. Notes in Math. Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1986. – 1200, 156 p.
41. Murray F. J. *On complementary manifolds and projections in spaces L_p and ℓ_p* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1937. – 41. – P. 138–152.
42. Pełczyński A. *On the isomorphism of the spaces m and M* // Bull. Acad. polon. Sci., Ser. Sci. math., astron. et phys. – 1958. – 6, N 11. – P. 695–696.
43. Pełczyński A. *Projections in certain Banach spaces* // Stud. Math. – 1960. – 19, N2. – P. 209-228.
44. Pietsch A. *History of Banach spaces and linear operators.* – Boston: Birkhäuser, 2007. – 880 p.
45. Pisier G. *Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces* // Amer. Math. Soc. (Reg. Conf. Ser. Math.), Providence, R.I. – 1986.
46. Plichko A., Yost D. *Complemented and uncomplemented subspaces of Banach spaces* // Extracta Math. – 2000. – 15. – P. 335–371.

47. Rosenthal H. P. *Projections onto translation-invariant subspaces of* $L^p(G)$ // Mem. Amer. Math. Soc. – 1966. – 63. – P. 1–84.
48. Rosenthal H. P. *On the subspaces of* L^p $(p > 2)$ *spanned by sequences of independent random variables* // Isr. J. Math. – 1970. – 8, N3. – P. 273–303.
49. Rosenthal H. P. *On subspaces of* L^p // Ann. Math. – 1973. – 97, N2. – P. 344–373.
50. Маслюченко В. К. *Лекції з функціонального аналізу (у 3-х частинах).* – Чернівці. – Рута. – 2010-2011. – 600 с.